ELEMENTOS DE GEOMETRIA PLANA E SOLIDA SEGUNDO A ORDEM DE EUCLIDES...

Manoel de Campos ((S.I.)), Officina Rita-Cassiana (Lisboa)



ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA
PLANA, E SOLIDA.




TRADIDIT DISPVTATIONI EORVM
3.
Eques D. Emanuel Gonzalves Ribeyro inv.
1728
Carolus Grandi Sculp. Romæ

ELEMENTOS DE GEOMETRIA PLANA, E SOLIDA,

SEGUNDO A ORDEM

DE

EUCLIDES, PRINCEPE DOS GEOMETRAS.

ACCRESCENTADOS COM TRES UTEIS Appendices: o primeiro da Logiſtica das Proporções: o ſegundo dos Theoremas ſelectos de Archimedes: e o terceiro da Quadratriz de Dinoſtrato, para quadrar o Circulo, e tri-ſeçar o Angulo.

PARA USO DA REAL AULA

Da Esfera do Collegio de Santo Antão da Companhia de Jesus de Lisboa Occidental.

OFFERECIDOS

A' MAGESTADE D'ELREY NOSSO SENHOR

D. JOÃO V.

POR SEU AUTHOR O PADRE

MANOEL DE CAMPOS

Da meſma Companhia.



LISBOA OCCIDENTAL,

NA OFFICINA RITA-CASSIANA.

M.DCC.XXXV.

Com todas as licenças neceſſarias.



SENHOR.



ÃO tivera a confiança de pôr aos Reaes pês de V. Mageſtade eſta pequena obra; ſe não viſſe de huma parte

parte a innata benignidade, com que accolhe a todos os que procurão utilizar a Patria, e da outra a muita estimação que faz da Mathematica (como tam util à sua Coroa) de que são boas testemunhas as duas Aulas desta Corte, da Fortificação, e Nautica; as quaes à sombra do seu Real Palacio estão recebendo continuamente tam benignos influxos, como testemunhão as muitas graças, e distinctos privilegios, com que as favorece.

A Aula da Esfera *deste Collegio de Santo Antão (fundação do Senhor Rey D. Sebastião de saudoza memoria) não merece menor attenção da Real Providencia de V. Magestade; tanto pela sua veneravel antiguidade, como pela constancia com*

que

que ſempre manteve eſte importante eſtudo, ainda na decadencia das outras Aulas: e aſſim està muito confiada de que poſta aos Reas pês de V. Mageſtade haja de ſer attendida, e merecer-lhe tambem o ſeu Real agrado. O de que mais neceſſita (ſuppoſto o numeroſo concurſo dos que a frequentão) ſão livros claſſicos, e manuaes para adiantar a ſua applicação. Bem ſey que a Corte abunda delles, e dos melhores Authores, que tem illuſtrado eſta Sciencia; como aquella, que ſe està communicando continuamente com as mais polidas Nações de Europa: porèm tambem ſey, que a diverſidade dos eſtylos, dos idiomas, e dos methodos, não cauſão pequena confuſão aos Meſtres, e aos Diſcipulos, como me

têm

têm enſinado a experiencia. Eſta foy a razão, porque me reſolvi hâ tempos a formar hum Curſo Mathematico, *manual, e expedito, para ſervir com elle a meus Naturaes; recolhendo nelle todo o bom, e curioſo, que pude adquirir deſta ſciencia com o eſtudo de muitos annos. Bem ſey que a reſolução parecerà temeraria; e muito mais temerario o querer que ſaya a obra debaixo do Auguſto Nome de V. Mageſtade: porèm huma temeridade eſcuza a outra; e a incapacidade do ſogeito emendarà a Grandeza do Protector. Aquelle Eſpirito, Senhor, com que V. Mageſtade anima a todos os ſeus vaſſallos, para que promovão a gloria da Nação: aquelle Eſpirito, com que anima a dilatada Esfera da ſua Monarquia, ſem que*

haja

haja parte nella, por remota que seja, aonde não respire a vivacidade do seu Real Zelo: este Espirito, digo, me darà alentos para sahir à luz com esta obra: e me bastarà fixar a consideração, em que leva impresso no frontispicio o seu Augusto Nome, para que não desmaye na empreza; suprindo â força de estudo a falta do engenho. Emquanto pois nos faz V. Magestade a mim esta honra, à Aula esta graça, e dâ à Patria mais este exemplo da sua innata Generosidade; consentindo, que debaixo da sua Real Protecção saya à luz este pequeno penhor do meu agradecimento, ficarey rogando a Deos pela Saude, e Vida de V. Magestade: e serà a primeira lição, que dê a meus discipulos, o ficarem eternamente agradecidos ao seu Real favor.

§§ *favor.*

favor. Deos guarde a Real Pessoa de V. Mageſtade muitos annos &c. &c. Collegio de Santo Antão da Companhia de JESUS.

SENHOR

De V. Mageſtade

Seu mais humilde, mais obediente, e mais fiel ſervo.

Manoel de Campos.

PRO-



PROLOGO
AO LEITOR.

SAhir neſte tempo à luz com Elementos de *Euclides*, bem ſe deixa vêr, que mais he querer ſervir ao Publico, do que querer ſer Author. Tem-ſe eſtampado tantas vezes eſta obra, que não digo jà não hâ Nação; ſenão que não hâ Univerſidade, nem Eſtudo Publico, que os não tenha proprios para o uſo das ſuas Aulas: porèm por iſſo

§§ ii meſ-

mesmo experimentão os Mestres desta huma grande penuria, e mayor embaraço: penuria, porque attendo-se cada hum a esta imaginada copia, não os fazem vir de fora, na supposição de que se acharão facilmente: embaraço porque sendo tantos, e tam varios os estylos, e methodos dos Authores Estrangeiros, he impossivel regular huma Aula com tanta variedade de exemplares.

Esta he a razão porque, deixando outras obras, que tenho entre mãos, puz todo o cuidado em estampar, primeiro que todas, esta, que não tem de minha, mais que o trabalho de a fazer publica.

ca.

ca. Podera eſtampar ſegunda vez os Elementos do Padre *Stafford*, o qual ſendo Meſtre da meſma Aula eſtampou huns Elementos em lingua caſtelhana, pelo meſmo motivo, que eu tenho agora; porèm quem não ſabe, que aquella obra foy feita com muita preſſa; e ſó a fim de accodir promptamente à neceſſidade em que então ſe achava a Aula? Os do Padre *Tacquet*, de que uſa ordinariamente a Companhia, ſão ſũmamente eſtimados em todas as Nações, pelo breve, pelo claro, e pelo ſolido; razão porque ſe tem eſtampado muitas vezes, e os tem adoptado para uſo ſeu muitos Eſtu-

dos

dos Publicos: eſtes meſmos ſão os que dou à luz com mui pouca alteração; ſalvo a da lingua, que por ſervirem a todos, me foy aconſelhado, ou mandado, que foſſe na Portugueza: todavia não deixei de mudar alguma couſa em algumas Demonſtrações, e de lhe accreſcentar o 13. Livro, que ſupprimio o ditto Author; àlem do Appendiz ultimo, com que me pareceo ficaria completa a obra. De tudo dou razão nos prologos reſpectivos dos meſmos livros.

Vale.

LICEN-

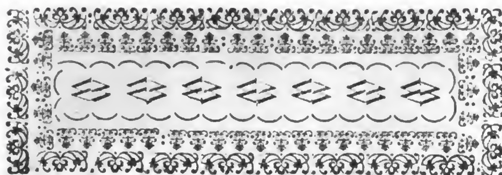


LICENÇAS DA ORDEM.

ANtonio Manſo da Companhia de JESUS, Provincial da Provincia de Portugal: por commiſſão eſpecial, que tenho de Noſſo Muito Reverendo P. Geral Franciſco Retz, dou licença, para que ſe poſſa imprimir eſte livro, intitulado *Elementos de Geometria*, compoſtos pelo Padre Manoel de Campos da meſma Companhia: o qual foy reviſto, e approvado por Religioſos doutos della, por nós deputados para iſſo; e em teſtemunho da verdade dei eſta aſſinada com o meu ſinal, e ſellada com o ſello do meu officio. Dada em Lisboa Occidental, aos 20. de Março de 1735.

Antonio Manſo.

LICEN-



LICENÇAS
DO SANTO OFFICIO.

Censura do Muito Reverendo Padre Mestre Frey Antonio de Santa Maria, Religioso de Santo Agostinho dos Descalços, Qualificador do Santo Officio, e Examinador das Tres Ordens Militares, e do Priorado do Crato, &c.

EMINENTISSIMO SENHOR.

NOs dous seculos, que a Religiosissima, e Sapientissima Companhia de JESUS, com assombro, e utilidade universal do Mundo; com jubilo, e gloria inexplicavel do Ceo, felizmente conta, floreceo sempre com heroes de sabedoria, portentos das letras assim Divinas como Humanas; porque sendo esta Sagrada Familia escolhida pela Providencia Divina, para dar a Deos a mayor gloria, sendo mandada a propagar o Evangelho no Universo; foy tambem

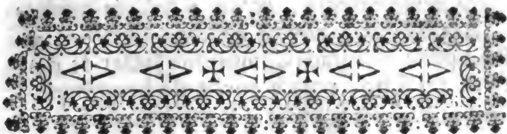
bem deſtinada para deſterrar do Mundo a ignorancia, e poriſſo decretada para Meſtra de todos os homens. Pouco homem ſerà aquelle, que hallucinado julge, que eſta Religião preclariſſima ſentio já mais idades de ferro, ſendo todas as que numera, ſeculos de ouro, e ouro tám fino, que nunca admittio liga, que o viciaſſe; nem conſentio eſcoria, que o corrompeſſe: poriſſo conſerva letras, e virtudes nos mais ſubidos quilates da perfeição, utilizando à hum, e outro Polo, não ſó com as linguas, mas com as pennas. As dos Eſcriptores Jeſuitas a tudo ſe remontão como as das Aguias: muito ignora quem o não ſabe, e mais que ignorante ſerà quem o não confeſſar, vendo ſómente os Authores, que occuparão as ſuas pennas na Faculdade da Geometria. Contou a minha reſpeitoſa veneração, e affectuoſa curioſidade, mais de ſeiſcentas, voando neſte emprego: e agora mais que todas a do R. P. M. Manoel de Campos.

Eſte illuſtre Varão deſde os primeiros annos foy milagre dos engenhos: e creſcendo com elle huma incomparavel erudição, admirou Roma, aſſombrou Eſpanha, e fez paſmar o Orbe Literario a ſua vaſtiſſima ſciencia. Quando o clarim da Fama não decantara eſta verdade, eu melhor que todos a podera teſtificar ſem hyperbole, nem lizonja; e o que mais he, ſem que a inteireza de Cenſor ſe corrompeſſe com a amizade de condiſcipulo: poſſo, e devo dizer, que todas as ſciencias, que nos ſette Sabios admirou Grecia, neſte ſó Sabio podera reſpeitar Portugal; e nas Facul-

des Mathematicas muito em particular; porque ſe em todas as ſciencias he Coryfeo, neſtas he unico: não ſó tem boas, mas bellas letras; porque não ſó ſabe, mas ſabe ſaber: pois na ſua grande ſabedoria reluz a condição do Mayor Bem. Bem o moſtra neſte volume Geometrico (que attentamente vi por mandado de V. Eminencia) e o moſtrarà em todos os que intenta dar ao prelo; os quaes, melhor que as pinturas de Apelles, trazem no ſeo nome a total approvação. A que faz aos livros acredores da licença de V. Eminencia para a eſtampa, ſe acharà neſte ſem o menor eſcrupulo; pois não contèm huma ſò letra, entre as muitas com que ſe explica, que encontre a noſſa Santa Fè, e bons coſtumes. V. Eminencia mandarà o que for ſervido. Lisboa Occidental. Convento da Boa Hora dos Agoſtinhos Deſcalços 28. de Março de 1735.

Fr. Antonio de Santa Maria.

Cenſura



Censura do M. R. P. M. Paulo Campelli, da Congregação do Oratorio, Qualificador do Santo Officio, &c.

EMINENTISSIMO SENHOR.

LI o Livro, que Vossa Eminencia me manda vêr, intitulado *Elementos de Geometria Plana, e Solida*, composto pelo Muito Reverendo Padre Mestre Manoel de Campos da sempre illustre Companhia de JESUS. E sem embargo, que o nome de seu Author nelle escritto era a approvação mais indubitavel, que o podia abonar; como o preceito de Vossa Eminencia me manda interpor o meu parecer, digo, que nesta obra concorda em tudo a materia, de que trata, com a doutrina, que enserra; porque corre esta tam plana, como he em tudo solida: e sobre estas circunstancias, verdadeiramente raras, tem tambem a especial, e unica, de que dizendo o que jà por tantos Doutores està tratado, como o Author declara no Prologo, com tal arte, e com tal energia se explica em tudo, que em tudo diz de novo: razão porque se pode chamar egregio este Livro; porque se faz egregio por este modo, segundo o que disse o Lyrico.

Hor. in Art. Poetica. *Dixeris egregiè, notum si callida verbum*
Reddiderit junctura novum.
Bem pode a Sagrada Companhia jactar-se muito de tal filho, pois a enche de bem merecido applauso; e faz com a fertilidade de seu engenho, que se verifique o que estava profetizado no Psalmo, e disse David talvez pondo nella os olhos: que serião cheios de fertilidade os seus Campos: *Campi tui replebuntur ubertate.* (Psal. 64.) Em fim não descubro nesta obra couza, que se opponha aos dogmas de Nossa Santa Fè Catholica, e bons costumes. Este he a meu parecer. Vossa Eminencia mandarà o que for servido. Lisboa Occidental, e Congregação do Oratorio 15. de Abril de 1735.

Paulo Campelli.

VIstas as informações, pode-se imprimir o livro intitulado *Elementos de Geometria &c.* e despois de impresso tornarà para se conferir, e dar licença que corra, sem aqual não correrà. Lisboa Occidental 19. de Abril de 1735.

Fr. Lencastre. Teixeira. Sylva. Abreu.

DO ORDINARIO.

POde-se imprimir o Livro, de que se trata; e despois de impresso tornará para se conferir, e dar licença para que corra. Lisboa Occidental 24. de Abril de 1735. *Gouvea.*

LICEN-

LICENÇAS DO PAÇO.

Approvação do Coronel Manoel da Maya, Engenheiro do Reyno, &c.

QUasi ſempre o ſer Cenſor foi Officio embaraçado, porque os diſcurſos humanos pela ſua diverſidade difficultozamente ſe ajuſtão: comtudo neſta occaſiaõ ſe facilita tanto eſta difficuldade, que não encontro mais duvida em continuar as approvações jà proferidas, do que os agigantados paſſos, de que neceſſito para as poder proſeguir: ſuprindo porém eſte defeito com a obrigação, em que as Ordens de V. Mageſtade me poem, não ſó reconheço por muyto conveniente, que o Author deſte livro alcance a licença, que pede; mas tambem me parecia juſto ſe lhe intimaſſe da parte de V. Mageſtade pozeſſe promptamente em publico todo o Curſo Mathematico, de que nos

nos dà noticia : e se com antecedencia me he licito expor a minha approvação, voluntario, e gostozo a offereço, fundado, em que, como armas forjadas, batidas, e limadas na mesma Officina, não podem deixar de sahir todas com igual lustre, e bondade. Pede-o com altos clamores o credito da lingua Portugueza, para que cesse o dizer-se que sò nella, entre as principaes de Europa, se não achão as Mathematicas reduzidas a hum Corpo: os curiosos, que não saõ instruidos nas linguas estrangeiras, alcançarão o proveito daquella lição com muyto menor trabalho: e todos se poderão aproveitar da muyta clareza, ordem, e especialissimo genio, com que o Author costuma ensinar, recreando, e introduzindo com tal suavidade as Doutrinas; que se costumão beber com sangue, que quando o Author as reparte, saõ alimentos tam bem compostos, que por mais que nutrão, nunca enfastião. Para mayor segurança do meu arbitrio, reconheço no Author todas as partes integrantes para concluir com absolutissima felicidade o promettido; que se reduzem à larga lição de livros, ensinos publicos, e aceitação da Pessoa, não sò entre Nacionaes, e vizinhos, mas ainda entre os Paduanos remotos. Não duvido que na mesma Doutissima Religião se achem muitos sogeitos capazes de serem Atlantes de tam grande Maquina; mas as eximias forças, de que o Author se acha revestido, não só segurão o exito da empreza, mas a bizarria, e excesso, com que se-

rá

rà executada ; como aquelle lutador , que ainda despois de ganhado o Campo , fica com os movimentos livres para segundos encontros. Este o meu parecer reduzido aos termos mais livres de affecto , ou adulação. V. Magestade mandarà o que for servido. Lisboa Occidental 3. de Mayo de 1735.

Manoel da Maya.

QUe se possa imprimir, vistas as licenças do Santo Officio , e Ordinario ; e despois de impresso tornará a esta *Mesa* para se conferir , e taixar, e dar licença para correr , sem aqual não correrà. Lisboa Occidental 6. de Mayo de 1735.

Pereira. Teixeira.



PROLUSÃO GEOMETRICA,

ENCOMIASTICO-HISTORICO-CRITICA.

§. I.

DA NATUREZA, EXCELLENCIA, e Progresso da Geometria.



NOME da Geometria menos diz, do que se estende o seu objecto: o nome dà a entender que só se occupa em medir a Terra: o objecto estende-se a toda a Quantidade continua, terminada com qualquer figura. Duas são as Geometrias; huma *Practica*, e outra *Especulativa*: a *Practica*, de donde nasceo a *Especulativa*, só trata das medidas vulgares, e proprias dos usos humanos; como são *Distancias*, *Alturas*, *Profundidades*, *Niveis*, *Aqueductos*, *Areas*, *Corpos*, &c. A *Especulativa*, que foy a que promoveo, e aperfeiçoou a Practica, estende-se, como disse, a toda a Quantidade continua. A *Es-*

peculativa consta principalmente de 3. partes a saber, *Elementos de Euclides*, *Esfericos de Theodosio*, *e Conicos de Apollonio*: a primeira, e segunda (a que se pode ajuntar a Trigonometria) chama-se *Geometria Inferior*, aqual toda se absolve por via de Regoa, e Compasso; e tem por objectos principaes, nos Planos o Circulo, e nos Solidos a Esfera. A terceira chama-se *Geometria Superior*, aqual tem por objecto principal a Pyramide Conica, cortada em differentes sitios com 3. planos, de que resultão 3. mysteriosas curvas, a saber, a *Parabola*, a *Ellipse*, e a *Hyperbola*: a estas se ajuntão muitas outras de differentes propriedades, como são a *Quadratriz*, a *Cissoide*, a *Espiral*, a *Conchoide*, &c.

Querer tesser panegyrico a esta noblissima Sciencia, seria querer comprehender o mar em huma breve concha: basta dizer que não houve em nenhuma idade Nação alguma culta, ou Eschola celebre, que não fizesse della summa estimação. *Platão* mandou pôr sobre a porta da sua Academia huma Tarjeta com esta letra: *Nullus Geometriæ expers accedito*: Nenhum, que não seja Geometra, entre nesta Aula: ou fosse pela affeição, que tinha â Geometria, ou por entender que só ella era a idea da verdadeira sciencia. Delle se diz que jà mais subira â cadeira, que não explicasse algum Problema de Geometria, como sal

que

que dava sabor, e graça a toda a erudição. *Galeno*, Medico insigne, despois de ter cursado as Escholas mais celebres do seu tempo, dos Peripateticos, e dos Estoicos, estando quasi desesperado de achar sciencia nesta vida; porque tudo quanto tinha aprendido, ou erão opiniões, ou fallacias; resoluto a se passar à seyta dos Pyrrhonios (que erão huns Filosofos, que duvidavão de tudo, e não assentavão em nada) confessa ingenuamente, que facilmente tomaria aquelle partido, se não fosse a Arithmetica, a Geometria, e a Dialectica, em que só achara evidencia nos principios, e certeza nos discursos; e daqui deixou recõmendado a seus discipulos, que jà mais perdessem de vista os mysterios daquelles numeros, e a subtileza daquellas linhas; como verdadeiras fontes do discorrer, do inventar, e do saber. E na verdade he cousa que faz pasmar, vêr como a Geometria, sem mais dialectica, que aquelle natural *Sorite*, ou cadeya de Proposições, com que vay passando de huma verdade em outra, chega ao mais alto da especulação, com tanta certeza no discurso, que jà mais vacilla, nem ainda nas verdades mais abstrusas, e mais alheas dos sentidos.

Quem fossem os inventores desta Sciencia, he questão entre os eruditos. Communmente se diz que forão os Egypcios, e entre elles hum certo *Theut*, ou *Deus*,

como diz *Platão in Phedro.* Deo motiva este estudo, entre aquella gente, a inundação do Nilo; porque confundindo-se todos os annos os limites dos campos, davão occasião aos colonos de grandes litigios, e discordias. *Thales Milesio,* o primeiro Sabio de Grecia, foy tambem o primeiro que a transplantou do Egypto para a sua patria, como diz *Diogenes Laërcio.* A este se attribue a invenção das Proposições 5.15. e 26. do 1. livro, e a 31. do 3. Delle se diz que achara o modo de inscrever no circulo o triangulo equilatero; pelo que sacrificou âs Musas hum boy: tambem se diz que no Egypto chegara a medir as Pyramides pelas sombras. Da simplicidade destes inventos se pode inferir, qual seria por aquelle tempo a Geometria dos Egypcios: he verosimil que apenas chegaria â dos nossos agrimensores, que não fazem mais que reduzir as terras a rectangulos, para medir as areas pela multiplicação dos lados: comtudo a elles se attribue a invenção, e uso da Regoa, e do Campasso.

Nasceo *Thales Milesio* no anno 120. da Fundação de Roma, o qual corresponde ao de 632. antes de Christo. A elle succedeo *Mamertino,* insigne Geometra, de quem se diz em geral que illustrara muito esta sciencia. Viveo quasi no mesmo tempo *Amethisto,* Geometra summo, a quem se attri-

attribuem muitas invenções geometricas: porèm àlem do nome, e desta fama, não diz mais delle *Proclo*: foy irmão do Poeta *Stesichoro*.

No mesmo seculo succedeo a todos estes o famoso *Pythagoras Samio*: o qual despois de peregrinar pelo Egypto, e pela Persia, se recolheo a Grecia a ensinar o muito, que tinha aprendido nas Nações estrangeiras, aos seus Naturaes. Alguns lhe attribuem o transplantar do Egypto à Grecia a Mathematica; porèm o mais certo he, que foy o primeiro que abrio nella Eschola Publica. Foy insigne na Arithmetica, na Musica, e na Astronomia: porèm mais particularmente na Geometria, que illustrou com admiraveis inventos: sua he a invenção da 32. do 1. livro; theorema tam insigne, que o poem *Aristoteles* por exemplo da perfeita Demonstração: tambem he sua a invenção da 47. do mesmo livro; pela qual sacrificou às Musas cem boys, a que chamão os Gregos *Hecatombe*.

Despois de *Pythagoras*, jà no 3. seculo da mesma Fundação, cultivarão este estudo *Anaxagoras*, de quem não existe mais que esta memoria: *Cenopides Chio*, a quem se attribue a 12. e 24. do 1: e *Zenodoro* seu discipulo, o qual foy Author de hum celebre tratado das Figuras Isoperimetras. Nesta obra pertende este Author desterrar do vulgo esta ignorancia; *Que as Figuras Isope-*

Isoperimetras [isto he do mesmo ambito] *são iguaes*: e mostra que as Figuras quantos mais lados tem, tanto são maiores, que as Isoperimetras de menos lados; de que se segue, que o circulo he a mayor figura de todas: e que as Figuras, quanto mais iguaes tem os lados, tanto são mayores, *Cæteris paribus*, que as que os tem desiguaes.* Este tratado tomou *Clavio* de *Theon*, o qual o attribue a *Zenodoro*: tocaremos delle alguma couza na Geometria Practica, por ser util.

Floreceo no mesmo seculo *Hippocrates Chio*, famoso Medico, o qual querendo quadrar o Circulo, quadrou a Luneta; porèm com pouca felicidade, porque a sua Demonstração a toma *Aristoteles* por exemplo do *Paralogismo*. Este foy o primeiro, que compoz Elementos de Geometria, os quaes não existem. Sendo jà celebre no seu tempo a reposta do Oraculo Delfico, notou, que se entre duas rectas se achassem duas meyas proporcionaes, se teria o modo de duplicar o Cubo. Florecerão tambem para o fim do mesmo seculo *Theodoro Cyreneo*, e *Timeo Locro*, ambos discipulos de *Pythagoras*, os quaes illustrarão muito a Geometria. A este segundo introduz *Platão* no seu Dialogo *in Timæo*; e alguns dizem que o tomou delle.

No principio do 4. seculo floreceo *Democrito Milesio*, o qual escreveo do contacto

cto do Circulo, e da Esfera: das Linhas Irracionaes: e dos Solidos. *Protagoras* no mesmo tempo tambem escreveo alguma couza pertencente a Mathematica: porèm nada disto existe.

A estes grandes Geometras succedeo *Platão* mayor que todos, discipulo de *Socrates*; o qual estimou tanto a Geometria que, como disse assima, nunca se passou dia que não expuzesse na Academia algum Problema. Foy o primeiro, que escreveo das Secções Conicas, e Cylindricas: e achou o modo de demonstrar Analytico; isto he, supppondo feito o que se pede: que he huma como Algebra natural, de que nasceo depois a Artificial. A este forão consultar os Delios àcerca da duplicação do Cubo; e ainda que os remetteo a *Euclides*, não deixou de tentar a solução da quelle difficil Problema. O seu methodo de achar duas meyas proporcionaes, segundo a regra de *Hippocrates*, traz *Eutocio* no seu commentario, e nós o poremos abaixo no livro 6. Nas suas obras, que existem, alguns discursos se achão Geometricos, os quaes recolheo, e explicou *Theon*: porèm o principal perdeo-se. Foy *Anthenienſe*, e chamarão-lhe por antonomasia o *Divino*.

Amiclas Heracleotes, *Laodamas Thasio*, e *Neotides*, discipulos, ou amigos de *Platão*, illustrarão muito a Geometria. *Leon* tambem compoz Elementos, e mais accres-

accrefcentados, que os de *Hippocrates*; porèm não exiftem. *Eudoxio Gnidio*, companheiro do mefmo *Platão* na peregrinação do Egypto, inventou o 5. livro das Proporções, no qual nos deixou huma nova Logica, ou Arte de argumentar, tam fubtil, e tam ajuftada com a fciencia, que fe não podia defcobrir couza mais accomodada para promover a Geometria.

Theeteto Athenienfe efcreveo fobre os 5. Corpos Regulares; porèm perdeo-fe efta obra. *Bryfo*, e *Antifon* tentarão por efte tempo a quadratura do Circulo com pouco fucceffo. *Filofofo*, difcipulo de *Platão*, tratou das *Figuras Circulares*, e das *Metades*: porèm não apparecem as fuas efpeculações.

No 5. Seculo, perto de 360. annos antes de Chrifto, floreceo *Theudio Magnefio*, o qual foy o terceiro, que compoz Elementos. Compoz fobre a mefma materia, e amplificou-a muito *Hermotimo Colofonio*. Illuftrou a Geometria *Cyzicino Athenienfe*. E *Arifteo*, o mais velho, efcreveo dos Conicos, e da Refolução dos Lugares Solidos, que fão obras de mais profunda efpeculação: porèm tudo ifto fe perdeo. *Pappo* livro 5.

Filippe Meteo, difcipulo de *Platão*, tambem efcreveo muito por efte tempo fobre a Geometria. *Menechmo*, difcipulo de *Eudoxio*, achou, fegundo alguns dizem, as Sec-

çōes

ções Conicas: porèm ignorà-se qual foy particularmente a sua invenção. Acha-se em *Eutocio* hum methodo seu de achar duas meyas proporcionaes para a duplicação do Cubo; o qual daremos na Geometria Practica. *Gemino* demonstrou, que só havia 3. Linhas semelhantes; a saber, a *Recta*, a *Circular*, e a *Espiral Cylindrica*: e fez mais universal a 5. do 1. demonstrando a igualdade dos angulos sobre a base, ainda quando esta he Circular, ou Espiral Cylindrica. Achou tambem 3. Curvas muito celebres; a saber, a *Espiral*, a *Conchoide*, e a *Cissoide*. Destas mesmas Curvas escreveo despois *Perseo Cittico*. E finalmente o Grãde *Aristoteles Estagyrita* compoz hum livrinho da *Unidade*, e das *Linhas Inseccaveis*, o qual existe.

Restaurador de todas estas perdas, e illustrador da mayor parte destas illustres invenções, foy *Euclides*, famoso Geometra, e quinto Author dos Elementos, em quem terminarey esta memoria, deixando o mais do Progresso para o meo Onomastico Mathematico.

§. II.

De Euclides, e das suas Obras.

HE questão entre os eruditos quem foy *Euclides*? Alguns o confundem

dem com *Euclides* Filosofo, natural de Mégara [Cidade proxima ao isthmo Corinthiaco] o qual foy Author de huma Seyta, chamada *Megarica* pelo lugar da Eschola, e *Dialectica* pelo methodo da Doutrina. Este Filosofo, que foy discipulo de *Socrates*, foy tam celebre no seu tempo, que obrigou a *Platão* a hir de Athenas a Mégara sómente por conferir com elle, como diz *Laërcio*: e *Valerio Maximo l. 8. c. 12.* accrescenta, que consultado o mesmo *Platão* pelos Delios sobre a duplicação do Cubo, os remettera a *Euclides*; de que se infere, que era tambem insigne Geometra. Este fundamento com mais outras conjecturas fizerão tam verosimil aquella equivocação, que na Edição vulgar dos Elementos, segundo *Campano*, e *Theon*, o Author dos Elementos he *Euclides Megarense*: porèm o mais certo he, que o nosso *Euclides* foy diverso, e que floreceo muitos annos depois de todos os coetaneos de *Platão*; como diz *Proclo* na prefação a *Euclides*: e se infere claramente do mesmo *Diogenes Laërcio*, o qual fazendo individual menção de todas as obras de *Euclides* Filosofo, não diz huma sô palavra destes Elementos, que forão tam celebres em toda a Antiguidade.

Foy pois o nosso *Euclides*, natural de Alexandria; ou ao menos ensinou nella Geometria muitos annos, reynando *Ptolemeo*

lemeo I. o qual começou a imperar no Egypto despois de *Alexandre Magno*, na Olympiada 115. e pelos annos de 3.9. antes de Christo. Foy tam celebre nesta Sciencia, que illustrando-a nos 3. seculos antecedentes tantos, e tam insignes Filosofos, como temos visto, elle sô mereceo o nome de Principe dos Geometras; e de Mestre universal de todos os que se seguirão: sendo o seu mayor louvor dizer-se delle, que nunca cahira em paralogismo. Escreveo *Euclides*, àlem dos Elementos, hum livro de *Dados*, o qual se pode reduzir ao methodo analytico de *Platão*, por inferir de humas couzas dadas outras desconhecidas. Consta este livro de 94. Proposições; e he muy estimado, e util para os Geometras. Compoz tambem 4. livros de Conicos, em que seguio a doutrina de *Aristeo*: item da Resolução, e Fallacias: item 2. livros dos Lugares à Superficie; e 3. dos Prismas: as quaes obras não existem. Compoz finalmente varios tratados de Optica, Catoptrica, Musica Elementar, e Esfera; tudo com muita clareza, acerto, e boa ordem: porèm o que o fez mais celebre, e lhe mereceo a universal estimação, foy o livro dos Elementos, de que darey, antes de entrar na sua explicação, esta breve noticia:

§. III.

Dos Elementos de Euclides.

OS Elementos de *Euclides* ſão huma obra tam engenhoſa, util, e tam bem ordenada, que paſſa de 2. mil annos que eſtà na poſſe de huma univerſal eſtimação; occupando em todos os ſeculos os melhores engenhos na ſua illuſtração. Eſta he a razão porque nunca me pude accomodar à opinião daquelles, que por fugir da ſua, que chamão prolixidade, introduzem nas Eſcholas Elementos ſuccintos, e mutilados, que ſò forão ordenados para inſtruir Principes [em quem ſuprem os Meſtres a falta dos livros] e deixão a eſtrada real de aprender com fundamento. Muito menos me accõmodo à opinião de outros, os quaes tendo obrigação de inſtruir, e formar verdadeiros Mathematicos, como ſão Engenheiros, Pilotos, e Arquitectos, lhes dão ſómente humas doutrinas ſuperficiaes, que não ſervem mais, que de crear ignorantes, e preſumidos com pouca utilidade do bem publico.

A primeira queſtão, que ſe offerece neſta obra, ſuppoſto o que fica ditto no §. 1. he ſaber qual foy propriamente o trabalho de *Euclides*? Reſpondo que foy ordenar, e amplificar o que jà eſtava ditto; e accreſ-

centar

centar tudo o mais que faltava, para reduzir a Geometria â sua ultima perfeição.

A segunda questão he, se são de *Euclides* as Demonstrações dos Elementos? E a razão de duvidar he, porque em muitos exemplares Gregos se achão as Proposições sem demonstrações: porèm he certo, que as dittas demonstrações, assim como se achão em outros exemplares, saõ de *Euclides*; porque *Pappo* compara muitas vezes as demonstrações de *Euclides* com as de outros Geometras.

A terceira questão he, de quantos livros consta esta obra? Respondo que vulgarmente consta de 16: porèm os 13. primeiros são propriamente de *Euclides*: o 14. e 15. (e não tudo) são de *Hypsicles Alexandrino*: e o 16. com a amplificaçaõ dos 2. antecedentes, he de hum certo *Francisco Candalla*.

A ordem que segue *Euclides* nos dittos 13. livros he a seguinte. No 1. presuppostas varias *Definições*, *Axiomas*, e *Postulados*, trata dos angulos, das linhas perpendiculares, e despois das propriedades dos triangulos, e dos parallelogrammos. No 2. considera sómente os *Parallelogrãmos rectangulos*, e por meyo de varias equações estabelece os primeiros principios da Algebra. No 3. trata das propriedades do circulo. No 4. (que todo he problematico) ensina a inscrever, e circunscrever no mesmo circulo varias figuras

ras

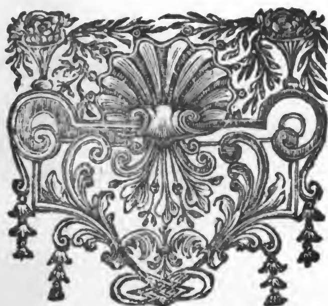
ras regulares. No 5. trata das proporções emgeral; e dà huma nova *Logica* para promover a Geometria: este livro he engenhosissimo, e utililissimo; porèm he reprovado de alguns pelo methodo; porquanto faz depender todas as Proposições de huma certa propriedade das quantidades comparadas, a que chama *Equi-multiplices*, aqual nem he clara, nem expedita. A este defeito acodimos com outro methodo igualmente scientifico, e muito mais desembaraçado, chamado das *Equi-aliquotas*. No 6. explica varias Proporções em particular; e estabelece a *Regra Aurea*; e os principios da *Geodesia*.

No 7. 8. e 9. explica as propriedades dos numeros; naõ todas, senaõ sómente aquellas, que lhe pareceraõ necessarias para entrar no 10. livro a contemplar a natureza, e propriedade das linhas incómensuraveis; que he huma especulaçaõ engenhosissima, ainda que reprovada de alguns por inutil. Eu nada julgo inutil, quando considero que a especulaçaõ se encaminha à ultima perfeiçaõ da sciencia; porque nesta forma seriaõ tambem inuteis muitas especulações da Algebra Moderna, as quaes naõ tem mais fim que apurar a sciencia.

A razaõ porque naõ exponho estes 4. livro nos meus Elementos, he porque os reservo para outro tratado particular da Arithmetica.

Exposta

Exposta assim a doutrina dos Planos, entra *Euclides* a tratar dos Solidos nos 3. ultimos livros pela ordem seguinte. No 11. expostos os primeiros principios, como fez nos Planos, passa logo a tratar dos Parallelipipedos, e dos Prismas: no 12. trata dos Pyramides rectilineas, e conicas, dos Cylindros, e das Esferas: e no 13. explica a natureza dos 5. Corpos Regulares; e compara-os entre si, e com a Esfera. Tambem este livro he julgado por inutil: porèm álem do ditto assima, veja-se o meu prologo ao ditto livro.



ELEMEN-



ELEMENTOS DE GEOMETRIA.

LIVRO I.

A EXCELLENCIA DESTE LIVRO (e naõ he pequena) he ſer o fundamento de todos os demais: eſte he o que leva a luz diante à Geometria para regiſtar os eſcuros ſeyos da Quantidade. Trata principalmente dos Triangulos, e dos Parallelogrammos: e as ſuas propoſiçoẽs mais celebres ſaõ as 32. 35. 37. 41. 44. 45. e 47.

DEFFINIÇÕES.

1 PONTO: he o que naõ tem partes.* Entende-ſe ſegundo a noſſa conſideraçaõ. O ponto a reſpeito da Quantidade, he como a unidade a reſpeito do Numero.

2 *Linha*: he huma quantidade ſómente longa; iſto he, ſem largura, nem groſſura. * A linha conſidera-ſe produzida do fluxo, ou movimento de hum ponto. Nomea-ſe ordinariamente com duas letras,

A poſtas

Fig. 1. poſtas nas duas extremidades; como A, B.

3 *Termos* da linha: ſaõ os pontos extremos, em que começa, e acaba; como A, B.

Fig. 2. 4 *Linha recta*: he a que corre direitamente de hum termo a outro; iſto he, ſem trocer para nenhuma parte; ou como diz *Arquimedes*, a mais breve, que ſe pòde tirar entre dous pontos: ou como diz *Plataõ*, aquella, cujos pontos extremos fazem ſombra, ou eſcondem a todos os intermedios. Tudo vem a ſer o meſmo.* Quando ſe diz *Recta*, entende-ſe linha.

Fig. 3. § O inſtrumento, com que ſe deſcreve huma recta, he a regoa: o modo, com que eſta ſe examina, he deſcripta a linha, paſſar a regoa à outra parte, e ver ſe ſe ajuſta com ella: porquanto ſe comprehendem eſpaço, nem a linha he recta, nem a regoa direita. Veja-ſe abaixo o Axioma 13.

5 *Superficie*: he huma quantidade ſómente longa, e larga; iſto he, ſem groſſura.* A ſuperficie conſidera-ſe produzida do movimento de huma linha.

6 *Termos da Superficie*: ſaõ as linhas extremas, com que ſe termina.

7 *Plano*, ou *Superficie Plana*: he a que corre direitamente de hum termo ao outro oppoſto; iſto he, ſem trocer para nenhuma parte: ou, como diz *Hero*, aquella à qual por todas as partes ſe pòde ajuſtar huma linha recta.* O Plano conſidera-ſe produzido do movimento de huma recta, regulada por outra: podem-ſe-lhe accomodar as meſmas definiçóes, que démos arriba à linha recta; iſto he, ſer a mais breve, que ſe pòde conſiderar entre dous termos: ou, cujas linhas extremas fazem ſombra a todas as intermedias.

8 *Angulo Plano*: he a inclinaçaõ de duas linhas exiſtentes em hum plano, e concurrentes em hum ponto.* O Angulo naõ he quantidade; ſe não modo della, como a figura.

Fig. 4. 9 *Lados* do Angulo: ſaõ as rectas AB, CB, que o formaõ.

10 *Ver-*

10 *Vertice*: he o ponto B, em que concorrem os lados. * O Angulo nomea-se com tres letras, das quaes a media he a que determina o angulo; como A B C, FHG, &c. Isto se entende principalmente quando muitos angulos concorrem em hum ponto H (Fig 6.) e póde haver nelles alguma equivocaçaõ; porque naõ a havendo, bastarà nomear cada hum com a letra do vertice; como angulo B, ou H,&c. (Fig. 4.) Eu ainda no caso em que concorraõ muitos em hum ponto, os nomearei muitas vezes com huma só letra, por evitar prolixidade; e serà aquella pequena, que estiver dentro do angulo, como, *o. i.* &c.

11 *Angulos iguaes*, ou *semelhantes*: saõ aquelles, que se ajustaõ entre si, postos os vertices H,B, hum sobre o outro; e juntamente os lados. * Para que os angulos se digaõ iguaes, naõ he necessario que sejaõ iguaes os lados, basta que sejaõ iguaes as inclinações.

12 *Angulos desiguaes*, ou *dessemelhantes*: saõ quando postos os vertices hum sobre o outro, naõ se ajustaõ entre si os lados; isto he, quando ajustando-se quaesquer dous lados HF, o outro HG, ou cahe dentro, ou cahe fóra de HC; e entaõ aquelle angulo FHC, serà mayor, cujo lado HC, cahir fóra. Fig. 6.

13 *Angulo rectilineo*: he o que formaõ duas linhas rectas: *Curvilineo*, o que formaõ duas linhas curvas: e *Mixtilineo*, o que fórma huma curva, com huma recta. Fig. 4. 5. e 7.

14 *Angulo recto*: he o que tem hum lado perpendicular ao outro: isto he, quando huma recta BX, cahe de tal sórte sobre outra AC, que naõ inclina mais a huma que a outra parte; e entaõ a ditta recta BX, chama-se *Perpendicular*; e os angulos B X A, B X C, saõ rectos. Ou tambem, angulo recto he quando produzido hum lado A X, se forma da outra parte outro igual. Fig. 8.

§ O instrumento, com que se descreve hum angulo recto, he huma esquadra: consta esta de duas re-

goas huma perpendicular à outra: ſeu inventor foi *Pythagoras*, como diz *Vitruvio* l. 9. c. 2. O modo, com que ſe examina ſe eſtà exacta, he deſcrever hum angulo, e produzido hum lado para fóra delle, paſſar a eſquadra a outra parte; e ver ſe ſe ajuſta com o outro.

Fig. 9.

Fig. 10. 15 *Angulo Agudo*: he o angulo FBD, menor que o recto ABD.

Fig. 11. 16 *Angulo Obtuſo*: he o angulo HBE, mayor que o recto GBE.

17 *Figura Plana*: he huma ſuperficie plana comprehendida por todas as partes com huma, ou com muitas linhas.

18 *Circulo*: he huma ſuperficie plana, comprehendida por todas as partes com huma ſó linha, dentro da qual ha hum ponto A, do qual todas as rectas, que ſe tiraõ à extremidade, ſaõ iguaes. A ditta extremidade ſe chama *Circumferencia*, ou *Periferia*.

Fig. 12.

19 *Centro*: he o ponto A, donde ſahem as linhas iguaes.

20 *Diametro*: he a recta B C, que paſſa pelo centro, e termina de huma, e outra parte na circumferencia, dividindo o circulo em duas partes iguaes.

21 *Semidiametro*, ou *Rayo*: he a recta AC, ou AD, que corre do centro atè a circunferencia.

22 *Semicirculo*: he a figura ADC, comprehendida de huma parte com metade da circunferencia, e da outra com o diametro.

§ O Circulo conſidera-ſe produzido do movimento de huma recta, cujo termo A, eſtá fixo; e o outro D, ſe move ao redor. O inſtrumento com que ſe deſcreve he o Compaſſo: o mais ſimplez, e o mais engenhoſo inſtrumento de todos, quantos ſe tem inventado; ſeu inventor foy *Perdix*, ſobrinho de *Dedalo*.

Obſervou *Ariſtoteles* na geraçaõ do Circulo tres paradoxos notaveis: 1. O Moto, e a Quiete da linha Generante; iſto he, eſtar toda em movimento, eſtando

parado

parado o ſeu principio: e dado que eſte ſe mova, como dizem alguns, naõ he menor paradoxo, o moverſe circularmente hum ponto indiviſivel. 2. A variedade dos periodos, e das velocidades de todos os pontos daquella linha, ſendo o movimento hum ſó. 3. A repugnancia da circumferencia; pois he juntamente concava, e convexa (extremos de recto) ſendo indiviſivel.

Os Geometras dividem a circumferencia do Circulo em 360. partes iguaes, a que chamaõ *Gráos*: a cada gráo dividem outra vez em 60. partes, a que chamaõ *Minutos*: e a cada minuto tornão a dividir em outras 60. a que chamaõ *Segundos*. &c. Da primeira diviſaõ ſe ſegue, que a ſemicircunferencia conſta de 180. gráos; o Quadrante de 90. e o Sextante de 60. A razaõ que tiveraõ para eſcolher eſtes numeros, podendo eſcolher outros quaeſquer, foy; por terem eſtes, e naõ outros, muitas partes aliquotas; as quaes ſe explicaõ por numeros inteiros ſem miſtura dequebrados; o que he de muito alivio para os Calculos. O Circulo nomea-ſe com quaes quer letras diſpoſtas pela circumferencia, começando pela do Centro.

23 *Figura Rectilinea*: he huma ſuperficie plana, comprehendida por todas as partes com linhas rectas.

24 *Triangulo*: he huma figura rectilinea, comprehendida com tres rectas, as quaes neceſſariamente formaõ tres angulos.* Eſta he a mais ſimplez figura de todas as rectilineas; e em quem todas as outras ſe reſolvem. Nomea-ſe com tres letras, poſtas nos vertices dos tres angulos: algumas vezes com huma ſó, poſta no meyo do triangulo, como X, Z. Fig. 33. 34.

25 *Triangulo Equilatero*: he o que tem todos os tres lados iguaes.

26 *Triangulo Iſóſceles*: he o que tem ſómente dous lados iguaes.* Ao terceiro coſtumaõ chamar *Baſe*.

27 *Triangulo Eſcaleno*: he o que tem todos os tres lados deſiguaes.

28 *Trian-*

Fig. 17. 28 *Triangulo Rectangulo*: he o que tem hum angulo recto.* O lado B C, opposto ao ditto angulo, chama-se Hypotenusa.

Fig. 24. 29 *Triangulo Obtusangulo*: he o que tem hum angulo abtuso.

Fig. 25. 30 *Triangulo Acutangulo*: he o que tem todos os tres angulos agudos.

Fig. 20. e 21. 31 *Rectangulo*: he huma figura quadrilatera, a qual consta de 4. angulos rectos.* Todo o Rectangulo he equiangulo; seja, ou naõ seja equilatero.

Fig. 20. 32 *Quadrado*: he hum rectangulo equilatero: isto he, huma figura de quatro lados iguaes, e quatro angulos rectos.

Fig. 19. 33 *Rhombo*: he huma figura quadrilatera, que tem os quatro lados iguaes; porèm nenhum dos angulos rectos.

Fig. 14. 34 *Rhomboide*: he huma figura quadrilatera, que tem quaesquer lados oppostos iguaes; porèm naõ todos quatro; nem rectos todos os angulos.* Alèm destas quatro figuras quadrilateras, todas as demais se chamaõ *Trapezias*; e todas se nomeaõ com duas letras postas em quaesquer dous angulos oppostos; como A O.

Fig. 43. 35 *Parallelas Linhas*: saõ as rectas BA, FC, que postas no mesmo plano, naõ concorrem para nenhuma das partes, por mais que se estendaõ.* Chamão-se tambem *Equidistantes*; porque continuadas infinitamente para qualquer das partes, sempre distaõ entre si com iguaes intervallos: estes se tomaõ nas perpendiculares O R, Q L, que medeão entre ellas.

§ As parallelas considerão-se produzidas do movimento uniforme de huma perpendicular sobre outra; descrevendo o termo R da movel huma parallela à immovel. O instrumento, com que se descrevem, consta de quatro regoas moveis, connexas entre si com quatro torninhos redondos.

Fig. 16.

Fig. 14. 36 *Parallelogrammo*: he huma figura quadrilatera, cujos

cujos lados oppostos AC, BO: BA, OC, saõ parallelos. * Todo o rectangulo he parallelogrammo; mas nem todo o parallelogrammo he rectangulo.

37 *Diametro*, ou *Diagonal* do parallelogrammo: he a recta BC, que se tira de hum angulo ao outro opposto. * Quando de qualquer ponto O da ditta Diagonal se tiraõ duas parallelas LF, GE, a quaesquer lados conjuntos BC, BD, fica dividido o parallelogrammo em outros quatro: destes os dous LE, GF, que estaõ fóra da diagonal, se chamaõ *Complementos*: os outros dous EF, LG, pelos quaes atravessa a mesma diagonal, se dizem *Existir* no diametro. Fig. 64. e 65.

38 Quaesquer outras figuras planas rectilineas, que tem mais de quatro lados, chamão-se *Multilateras*, ou *Polygonas*: destas humas saõ *Regulares*, outras naõ: as regulares saõ as que tem todos os lados, e angulos iguaes; as irregulares as que os naõ tem. As regulares tomaõ os nomes do numero dos angulos, de que constaõ: v.g. Pentagono consta de cinco angulos: Hexagono de seis: Heptagono de sette, &c. Humas, e outras se nomeaõ com duas, ou tres letras dispostas pelos angulos.

39 *Angulo externo* de qualquer figura: he o que fórma hum lado produzido, com o conjuncto para a parte de fóra; como ABC. Fig. 121

POSTULADOS.

Postulado: he o que se pede, e naõ se pòde negar. Pede-se pois para que se conceda.

1 QUe se tire de hum ponto a outro huma linha recta.

2 Que dada huma recta, se estenda, ou encurte para qualquer parte.

3 Que de qualquer ponto dado, e com qualquer intervallo se descreva hum circulo. 5 Es-

5 Estes saõ os unicos Postulados, com que passou a Geometria Antiga a explorar os mais occultos segredos da Quantidade; sem mais instrumentos, que huma regoa, e hum compasso. A Geometria Superior promove a sua especulaçaõ por meyo de outros Postulados, e com a ajuda de outros instrumentos de mayor artificio, como diremos em seu lugar.

AXIOMAS.

Axioma: he huma sentença evidente, a qual por si mesma se manifesta, como a luz.

1 AS quantidades iguaes a huma terceira saõ iguaes entre si. E todas as que saõ mayores, ou menores que huma, saõ mayores, ou menores que outra sua igual.

2 Se à quantidades iguaes se accrescentarem outras iguaes, as compostas seraõ iguaes. E,

3 Se de quantidades iguaes se tirarem partes iguaes, os residuos seraõ iguaes.

4 Se a quantidades desiguaes se accrescentarem outras iguaes, as compostas seraõ desiguaes. E,

5 Se de Quantidades desiguaes se tirarem partes iguaes, os residuos seraõ desiguaes.

6 Os duplos, triplos, quadruplos, &c. como tambem as metades, terças, quartas, &c. da mesma, ou de iguaes quantidades, saõ entre si iguaes.

7 As quantidades, que se ajustaõ perfeitamente entre si saõ iguaes. * Note-se bem este Axioma, porque delle dependem os primeiros Quatro Livros.

8 As quantidades iguaes, e semelhantes, ajustaõ-se perfeitamente entre si. * Entendo por *quantidades semelhantes*, linhas rectas com outras rectas; angulos rectilineos com outros rectilineos; circulos com circulos; arcos com arcos, &c. porque de outra sorte seria falso o Axioma.

9. O

9 O todo he mayor, que a ſua parte.

10 Os angulos rectos todos ſaõ iguaes.

11 Se huma recta RX cortar outras duas rectas DE, XV, fazendo com ellas para qualquer das partes dous angulos internos EDX, DXV, menores que dous rectos; as dittas rectas continuadas para a meſma parte, concorreraõ finalmente em algum ponto O. Fig. 47.

§ A verdade deſte Axioma, naõ he taõ clara, que naõ neceſſite de domonſtraçaõ; aſſim como neceſſita a Prop. 29. que he outra verdade ſemelhante a eſta: por iſſo *Gemino*, e *Proclo* a excluiraõ do numero dos principios evidentes; e nòs a demoſtraremos abaixo no Eſcholio da ditta Prop. 29. O Padre *Tacquet* em lugar deſte Axioma, ſubſtitue outros dous, os quaes conſtão manifeſtamente da geração das parallelas; e ſervem para demonſtrar a Prop. 27. ſem dependencia delle.

* 11 As parallelas uſão de perpendiculo commum; iſto he, a Recta RO, que he perpendicular à recta FC, he tambem perpendicular à ſua parallela BA. Fig. 48.

* 12 Duas perpendiculares RO, LQ, cortão de duas parallelas porções iguaes, RL, OQ.

13 Duas rectas não comprehendem eſpaço; porque para iſto ſão neceſſarias ao menos tres.

14 Duas rectas não pòdem ter ſegmento commum: iſto he, não pòdem continuar com huma terceira, perſeverando rectas.* Infere-ſe manifeſtamente da primeira definição da linha recta: porêm para mayor clareza, continuem, ſe for poſſivel, as rectas IX, OX, com a recta XZ; e deſcreva-ſe do ponto X, com qualquer intervallo, hum arco, o qual ſe divida para huma, e outra parte, começando do ponto I, em quaeſquer partes iguaes à IO: tirem-ſe do centro X, pelos pontos das diviſões outros tantos rayos XA, XE, XV, &c. Porquanto IO, he igual à IE, naõ ha mayor razão, porque ſendo rectas OXZ, IXZ, o naõ ſejão tambem IXZ, EXZ: Fig. 24.

 logo

logo tambem o ferão as duas extremas OXZ, EXZ; e por confequencia, outras quaefquer mais apartadas, VXZ, AXZ; o que he manifeftamente abfurdo.

PROPOSIÇÕES.

As Propofições Geometricas faõ em duas differenças: ou enfinão a conftruir algumas figuras, ou demonftrão as propriedades das jà formadas: as primeiras chamão-fe Problemas, *as fegundas* Theoremas. *Alèm deftas Propofições perfeitas, ha outras imperfeitas; como faõ* Lemmas, Porifmas, Corollarios, *e* Efcholios; *as quaes ou fervem para demonftrar mais facilmente as primeiras; ou fe inferem dellas.*

Quanto às citações, e abreviaturas fe note, que

Def. fignifica	*Definição*	*Theor.* fignifica	*Theorema.*
Poft.	*Poftulado*	*Probl.*	*Problema.*
Ax.	*Axioma.*	*Prop.*	*Propofiçaõ.*
Lem.	*Lemma*	*Conftr.*	*Conftrucção.*
Cor.	*Corollario.*	*Dem.*	*Demonftração.*
Efcb.	*Efcbolio.*	*Hypoth.*	*Hypothefe.*
Por.	*Porifma.*	*Q.E.&c.*	*Que era o que fe devia fazer, ou demonftrar.*
Ant.	*Antecedente.*		

PROPOSIÇÃO I. *Problema.*

Sobre huma recta dada AB, conftruir hum triangulo equilatero ACB.

Fig. 27. C*Onftrucção.* Tome-fe nas pontas do compaffó o intervallo da recta dada AB; e pofta huma ponta

ta em A, e depois em B, deſcrevão-ſe dous circulos (*Poſt*.3.) os quaes ſe cortem em C: tirem-ſe as rectas AC, BC (*Poſt*. 1.) digo que o triangulo ACB, he o equilatero, que ſe pede.

Demonſtração. A recta AC, he igual à AB (*Def*.18.) e a recta BC, he igual à BA: logo as rectas AC, BC, ſaõ iguaes entre ſi (*Ax*.1.) logo o triangulo ACB, he equilatero (*Def*.25.) *Que era o que ſe pedia.*

PROPOSIÇÃO II. *Probl.*

Dado o ponto B, tirar delle huma recta igual a outra dada EO. Fig. 18.

Conſtr. Tome-ſe no compaſſo a recta EO; e poſta huma ponta em B, deſcreva-ſe com a outra hum arco: de qualquer ponto C, deſte arco tire-ſe huma recta ao ponto dado B; ſerà eſta igual a EO.

Dem. Conſta da Def. 18. e do Ax. 1. ſe ſe conſidera huma recta entre as pontas do compaſſo.

PROPOSIÇÃO III. *Probl.*

Dadas duas rectas deſiguaes EO, BA, cortar da mayor BA, huma parte BC, igual à menor EO.

Conſtr. Tome-ſe no compaſſo a recta EO; e deſcreva-ſe do ponto B, hum arco, o qual corte a mayor em C: digo que BC, he a parte, que ſe pede.

Dem. He a meſma que a da antecedente.

PROPOSIÇÃO IV. *Theorema.*

Fig. 24. *Se dous triangulos DHG, CBA, tiverem dous lados respectivamente iguaes; isto he, DH igual à CB; e GH, igual à AB; e os angulos comprehendidos dos dittos lados H, B, tambem iguaes: serão as bases dos dittos triangulos DG, CA, iguaes; iguaes respectivamente os angulos sobre as bases: isto he, D igual à C; e G igual à A; e os triangulos totalmente iguaes.*

D*Em.* Imagine-se o primeiro triangulo posto sobre o segundo; e que posto o vertice H sobre o vertice B, cahe o lado DH, sobre o lado CB. Por quanto os angulos H, B, são iguaes (*Hypoth.*) cahindo o lado DH, sobre CB, cahirà GH, sobre AB (*Def.* 11.) e por quanto os dittos lados são respectivamente iguaes (*Hypoth.*) cahirà o ponto D, sobre C; e G, sobre A (*Ax.* 8.) logo as bases DG, CA, se ajustarão entre si (*Ax.* 13.) e por consequencia serão iguaes (*Ax.* 7.) Ajustando-se as bases, e os lados, os triangulos serão totalmente iguaes (*Ax.* 7.) logo tambem os angulos sobre as bases serão respectivamente iguaes. *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

Este methodo de demonstrar, fundado na coherencia de huma quantidade com outra, nos servirà atè o 5. livro; desde o qual, por beneficio das Proporções, tomarà a Geometria outro methodo de demonstrar mais abstracto, e mais universal.

Não faz menção Euclides *da conversa desta Prop. porèm convem demonstralla, porque della depende a 6. e a 26.*

SE as bases de dous triangulos forem iguaes; e iguaes respectivamente os angulos adjacentes: tambem

tambem os lados dos dittos triangulos ſerão reſpectivamente iguaes; iguaes os angulos dos vertices; e ambos os triangulos totalmente iguaes.

Dem. *Por quanto as baſes DG, CA, ſe ſuppoem iguaes; e iguaes reſpectivamente os angulos adjacentes; ajuſtada huma com outra, cahirá o lado DH, ſobre CB; e GH, ſobre AB* (Def. 11.) *Logo tambem o ponto H, cahirà ſobre B [porque de outra ſórte, ou os angulos ſobre as baſes não ſerião iguaes, contra a hypotheſe; ou duas rectas terião ſegmento commum, contra o Ax* 14.] *logo os dous triangulos ſão totalmente iguaes* (Ax. 7.) *e por conſequencia, iguaes reſpectivamente os lados, e iguaes os angulos dos vertices. Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO V. *Theor.*

Em qualquer triangulo Iſóſceles ABC, os angulos ſobre a baſe A, C, ſão iguaes. Fig. 25. 26.

DEm. Imagine-ſe o triangulo dado virado para a outra parte; e que aſſim virado *cba*. ſe poem ſobre ſi meſmo. Por quanto os angulos *b*.B, ſão iguaes; e iguaes reſpectivamente os lados, que os comprehendem; iſto he, *cb*. igual à AB, e *ab*. igual à CB (*Hypoth.*) tambem os angulos ſobre as baſes ſerão reſpectivamente iguaes; iſto he, *c*. igual à A, e *a*. igual à *c*. (*Prop*.4.) logo *c*. ou C, he igual à A. *Q.E.&c.*

COROLLARIO.

Todo o triangnlo equilatero he tambem equiangulo;

PROPO-

PROPOSIÇÃO VI. *Theor.*

*Se o triangulo ABC, tiver os angulos ſobre a baſe A, C, iguaes; ſerà Iſóſceles: iſto he, tambem os lados CB, AB, oppoſtos aos dittos angulos, ſerão iguaes.** He converſa da antecedente.

DEm. Imagine-ſe o triangulo dado virado, e ſobrepoſto à ſi meſmo, como na antecedente. Porquanto a baſe *ca.* he igual à AC; e os angulos adjacentes ſão reſpectivamente iguaes; iſto he, *c.* igu l à A, e *a.* igual à C (*Hypoth.*) tambem os lados dos dittos triangulos ſerão reſpectivamente iguaes (*Eſch da* 4.) logo *cb.* iſto he, CB, he igual à AB. *Q.E.&c.*

COROLLARIO.

Todo o triangulo equiangulo he tambem equilatero.

PROPOSIÇÃO VII. *Theor.*

Serve para demonſtrar a ſeguinte, naqual vay incluſa.

PROPOSIÇÃO VIII. *Theor.*

Fig. 24. *Se dous triangulos DHG, CBA, tiverem todos os tres lados reſpectivamente iguaes; iſto he, DH igual a CB; DG igual a CA; e HG igual a BA; tambem os angulos oppoſtos a iguaes lados ſerão reſpectivamente iguaes; iſto he, D igual à C; H à B; e G à A.*

DEm. Imagine-ſe a baſe DG, ſobrepoſta a CA; e que pela igualdade das rectas cahe o ponto D, ſobre

ſobre C; e G ſobre A. Agora, ou o ponto H, cahe ſobre B, ou não: ſe cahe, ajuſtão-ſe os triangulos perfeitamente entre ſi; e por conſequencia tem todos os angulos reſpectivamente iguaes (*Ax.*7.)

Senão cahe (como na figura 29) tire-ſe a recta HB. Porquanto DH, he igual a CB (*Hypoth.*) ſerà o triangulo HCB, Iſóſceles: logo o angulo H, he igual à *o.* (*Prop.* 5.) logo o angulo *u.* he menor que *o.* e por conſequencia muito menor que B: porém, por ſer GH, tambem igual à AB (*Hypoth.*) o meſmo angulo *u.* devia ſer igual ao meſmo angulo B (*Prop.*5.) logo he muito menor, que o ſeu igual; o que he abſurdo.

ESCHOLIO.

Eſte modo de demonſtrar chama-ſe Reducção a impoſſivel, *e he muito familiar aos Geometras, quando não achão meyos para demonſtrar direitamente as ſuas concluſões; o que ſuccede ordinariamente no principio das ſciencias: porém pode-ſe demonſtrar aſſim direitamente.*

Tenhão os triangulos DBG, DCG, os tres lados de hum iguaes aos tres do outro; e juntem-ſe por quaſquer dous lados iguaes de ſórte, que fiquem outros dous iguaes para ſima, e outros dous para baixo: tire-ſe a recta BG. Porquanto o triangulo BDC, he Iſóſceles(Hypoth.) *ſerà o angulo DBC, igual ao angulo DCB* (Prop. 5.) *e por quanto o triangulo BGC, tambem he Iſóſceles, ſerà o angulo GBC, igual ao angulo GCB: logo todo o angulo B, he igual a todo o angulo C* (Ax.2.) *Saõ tambem iguaes reſpectivamente os lados, que os comprehendem: logo tambem ſerão iguaes os angulos BDG, CDG; aſſim como os angulos BGD, CGD* (Prop.4.) *e por conſequencia, os tres de hum iguaes aos tres do outro. Q.E.&c.* Fig. 30.

PROPO-

PROPOSIÇÃO IX. *Probl.*

Fig. 30. *Dado hum angulo rectilineo ADE, dividillo pelo meyo.*

COnstr. Tomem-se do vertice D, em hum, e outro lado duas partes iguaes DB, DC (*Prop.* 3.) e descrevão-se dos pontos B, C, com hum mesmo intervallo dous circulos, os quaes se cortem em G: tire-se a recta DG; e dividirà esta o angulo dado pelo meyo.

Dem. Tirem-se as rectas BG, CG. Os triangulos DBG, DCG, tem todos os lados respectivamente iguaes (*Constr.*) logo os angulos BDG, CDG, oppostos a iguaes lados, tambem são iguaes (*Prop.* 8.) e por consequencia, o total D, està dividido pelo meyo. *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

Atègora se não tem descuberto modo Geometrico de dividir hum angulo em tres partes iguaes, por via de regoa, e compasso. Arquimedes *o divide por via de huma linha espiral, de que fallaremos na* Geometria *Practica:* e Pappo Alexandrino, *por via de outra linha curva, chamada* Quadratrix, *de que fallaremos no fim desta obra: porèm os principiantes, em quanto não chegão lâ, o poderão dividir mecanicamente, não sómente em tres, senão em quaesquer partes, da maneira seguinte.*

Fig. 26. *Ponha-se huma ponta do compasso no vertice C, do angulo dado, e com a outra se descreva hum arco aB, com qualquer intervallo. divida-se este arco em tantas partes, em quantas se deseja dividido o angulo; e tirem-se do ditto vertice, pelos pontos das divisões, outras tantas rectas: ficarà dividido o angulo nas partes, que se desejão.*

PROPO-

PROPOSIÇÃO X. *Probl.*

Dada huma recta finita BC, dividilla pelo meyo. Fig. 31.

Constr. Com o intervallo BC, (ou com outro qualquer) descrevão-se dos termos da recta dada B, C, dous circulos, os quaes se cortem nos pontos A, E: ajuntem-se estes com huma recta; e dividirà esta pelo meyo a dada em O.

Dem. Tirem-se as rectas BA, CA. Nos triangulos X, Z, os lados BA, CA, são rayos de iguaes circulos; o lado OA, he commum; e os angulos comprehendidos BAO, CAO, são iguaes (*Ant.*) logo tambem as bases BO, OC, serão iguaes (*Prop.* 4.) e por consequencia, BC està cortada pelo meyo em O. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XI. *Probl.*

Dada huma recta infinita AB, e nella o ponto O; levantar deste huma perpendicular à ditta recta. Fig. 33.

Constr. Tomem-se para huma, e outra parte do ponto O, as partes iguaes OR, OS: e descrevão-se dos pontos R, S, com qualquer intervallo, dous arcos, os quaes se cortem em C. Ajuntem-se os pontos O, C, com huma recta; e serà esta a perpendicular, que se pede.

Dem. Tirem-se as rectas RC, SC. Os triangulos X, Z, são respectivamente equilateros (*Constr.*) logo os angulos ROC, SOC, oppostos a iguaes lados, são iguaes (*Prop.* 8.) logo OC, he perpendicular à AB (*Def.* 14.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XII. *Probl.*

Fig. 34. *Dada huma recta infinita BA, e fora della hum ponto C; tirar deste huma perpendicular à ditta recta.*

COnstr. Descreva-se do ponto C, hum arco, o qual corte a recta dada nos pontos R, S: divida-se a recta RS, pelo meyo em O (*Prop.* 10.) e ajuntem-se os pontos C, O, com outra recta; serà esta a perpendicular, que se pede.

Dem. Tirem-se os rayos CR, CS. Os triangulos X, Z, são respectivamente equilateros (*Constr.*) logo os angulos em O, oppostos a iguaes lados, são iguaes (*Prop.* 8.) logo CO, he perpendicular à BA (*Def.* 14.) *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XIII. *Theor.*

Fig. 35. e 36. *Qualquer recta DO, que cahe sobre outra AB; ou faz com ella dous angulos rectos, ou dous iguaes a dous rectos.*

DEm. se DO, he perpendicular à AB (Fig. 35.) consta da (*Def* 14.) Senão: levante-se do ponto O, a perpendicular OE (Fig. 36.) Os 2 rectos EOB, EOA, são iguaes aos 3. EOB, EOD, DOA (*Ax.* 7.) porèm os primeiros 2. fazem o obtuso DOB: logo este junto com o agudo DOA, fazem 2. rectos. *Q.E.&c.*

COROLLARIOS.

1 DO mesmo modo se demonstra, que concorrendo muitas rectas no mesmo ponto O, todos os angulos, que nelle se formão, são iguaes a dous rectos.

2 E

2 E que quando se cortão duas rectas; ou fazem 4. rectos, ou 4. iguaes a 4. rectos.

3 E que quando muitas rectas se cortão no mesmo ponto O, todos os angulos, que nelle se formão, são iguaes a 4. rectos.

PROPOSIÇÃO XIV. *Theor.*

Se duas rectas AO, BO, concorrendo de huma, e outra parte, no extremo de outra recta DO, formarem com ella dous angulos iguaes a dous rectos AOD, BOD; as dittas rectas estarão em direitura, e comporão huma linha recta. Fig. 35.

DEm. Se AOB não he recta; seja recta outra qualquer AOE: logo os angulos DOA, DOE tambem são iguaes a dous rectos (*Ant.*) logo tirando o commum DOA, os remanentes DOB, DOE serão iguaes entre si (*Ax.*3.) isto he, será a parte igual ao todo; o que he absurdo.

PROPOSIÇÃO XV. *Theor.*

Quando se cortão duas rectas AC, BD, os angulos verticalmente oppostos (isto he i. e. ou tambem u. o.) saõ iguaes entre si. Fig. 34.

DEm. Os angulos *i. o.* são iguaes à dous rectos (*Prop.*13.) os angulos *o. e.* tambem são iguaes a dous rectos: logo tirando de summas iguaes o commum *o.* os remanentes *i. e.* serão iguaes (*Ax.*3.) *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XVI. & XVII.

São escusadas; porque se incluem na 32. a qual não depende dellas.

PROPOSIÇÃO XVIII. *Theor.*

Fig. 39. *Em todo o triangulo BOC, o angulo B opposto ao mayor lado CO, he mayor que o angulo C, opposto ao menor BO.*

DEm. B, não he igual à C; porque se o fosse, serião os lados BO, CO, iguaes (*Prop.6.*) contra a supposição. Tambem não he menor; porque se o fosse, tirada do mayor C, huma parte DCB, igual à B; serião os lados BD, CD, iguaes (*Prop.6.*) logo accrescentando a ambas as partes a commua DO, serião iguaes as compostas BDO, CDO (*Ax.2.*) e por consequencia, sendo BDO, ou BO, menor que CO (*Hypoth.*) tambem CDO seria menor que CO, contra a Def. da linha recta: logo, não sendo B, nem igual, nem menor que C, segue-se que he mayor. *Q.E.&c.*
* Do mesmo modo se demonstra do angulo C, a respeito do angulo O.

PROPOSIÇÃO XIX. *Theor.*

Fig. 39. *Em todo o triangulo BOC, o lado CO opposto ao mayor angulo B, he mayor, que o lado BO, opposto ao menor C.* * He conversa da antecedente.

DEm. CO, não he menor que BO; porque se o fosse, seria o angulo B, menor que C (*Ant.*) contra a hypoth. Tambem não he igual, porque se fosse,

se, seria B, igual à C (*Prop.*5.) tambem contra a hypoth. logo he mayor. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XX. *Theor.*

Os dous lados dequalquer triangulo são mayores que o terceiro.

DEm. Consta manifestamente da Def. da linha recta.

PROPOSIÇÃO XXI. *Theor.*

Se dos extremos de hum lado de qualquer triangulo se tirarem duas rectas GO, HO, para dentro do mesmo triangulo, as quaes concorrão em hum ponto O; as dittas rectas juntas serão menores que os dous lados GE, HE, que as comprehendem: porém comprehenderão mayor angulo O, que o que elles formão E. Fig. 40.

DEm. 1. parte. Continue-se GO, atè D. Os dous lados OD, DH, são mayores que o terceiro OH (*Ant.*) logo accrescentado o commum GO, serão GD, DH, mayores que GO, OH. (*Ax.*4.) Porèm, pela mesma razão, por ser GE, ED, mayores que GD, accrescentando o commum DH, tambem GE, EH, são mayores que GD, DH: logo muito mayores serão que GO, OH. *Q.E.&c.*

A 2. part. constará a baixo do Cor. 2. da Prop. 32. aqual não depende desta.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XXII. *Probl.*

Fig. 37. *Dadas 3 rectas CA, AB, BC (das quaes duas sejão sempre mayores, que a terceira) formar com ellas hum triangulo.*

COnstr. Transfira-se qualquer recta CA, para DG; e tanto do ponto D, com o intervallo BC; como do ponto G, com o interuallo AB, descrevão-se dous arcos, os quaes se cortem em H: tirem-se as rectas DH, GH, e ficarà formado o triangulo &c.

Dem. Consta manifestamente da constr.

PROPOSIÇÃO XXIII. *Probl.*

Fig. 37. e 38. *Dado hum ponto D, em qualquer recta; formar nelle hum angulo igual ao outro dado C.*

COnstr. Cortem-se os lados do angulo dado com qualquer recta AB; e transfira-se qualquer delles CA, de D, em G: dos pontos D, G, com os intervallos CB, AB, descrevão-se dous arcos, os quaes se cortem em H; e tirese a recta DH: serà o angulo HDG igual ao dado C.

Dem. Consta da 8.

ESCHOLIO.

Em graça dos principiantes porei aqui tres praxes, as quaes servem para a construcção dos angulos.

1 Dado em qualquer recta hum ponto D, formar nelle hum angulo igual ao outro dado C. Descre-

creva-se do ponto C, hum arco com qualquer intervallo, o qual corte os lados do angulo dado nos pontos A, O: descreva-se do ponto D, com o mesmo intervallo outro arco, o qual corte a recta dada em G: tome-se no compasso o intervallo AO; transfira-se de G em L; e tire-se a recta DL, ficarà formado o angulo, que se pede.

2 Examinar os gráos de qualquer angulo C. *Descreva-se em huma lamina transparente hum semi-circulo, e divida-se em 180. partes iguaes: ajuste-se o centro, e hum dos lados deste semi-circulo, com o vertice, e hum dos lados do angulo proposto; e veja-se quantas partes contem o arco intercepto AO. Digo que outros tantos serão os gráos do ditto angulo.*

3 Formar hum angulo de qualquer gráos. *Tire-se a recta CA infinita; e ajuste-se com ella hum lado do semi-circulo transparente, que disse assima: numerem-se do ponto A, tantas partes, quantos são os gráos, de que se deseja o angulo; e note-se o ponto O, termo da numeração, e juntamente o ponto C, correspondente ao centro: tire-se a recta CO. &c. A Dem. de todas estas praxes constarà depois, da ultima Prop. do livro 6.*

PROPOSIÇÃO XXIV. *Theor.*

Se em dous triangulos ACB, ACG, forem dous lados de hum AC, CB, iguaes respectivamente a dous do outro AC, CG; porém o angulo comprehendido dos primeiros mayor, que o comprehendido dos segundos; tambem a base AB, opposta ao mayor angulo, serà mayor que a base AG, opposta ao menor. E pelo contrario: se a base do primeiro trian- Fig. 41.

gulo for mayor, tambem o angulo opposto sera mayor.

D*Em.* 1. part. Imagine-se hum triangulo posto sobre o outro, de sorte que se ajustem quaesquer dous lados iguaes; v.g. os menores AC, e como, pela desigualdade dos angulos, os outros dous não se ajustão, e cahe hum fóra do outro (*Def.* 12.) ajuntem-se os termos delles com huma recta GB. O angulo AGB, he mayor que o angulo CGB (*Ax.* 9.) logo he mayor que o seu igual CBG [por ser Isósceles o triangulo GCB] e por consequencia muito mayor, que a sua parte ABG: logo no triangulo AGB, o lado AB, opposto ao mayor angulo G, he mayor que o lado AG, opposto ao menor B (*Prop.* 19.) isto he, a base do triangulo ACB, he mayor que a base do triangulo ACG. *Q. E. &c.*

A 2. part. consta da 1. por reducção a impossivel.

PROPOSIÇÃO XXVI. *Theor.*

Fig. 24. *Se dous triangulos DHG, CBA, tiverem dous angulos respectivamente iguaes; isto he, D igual à C; e G igual à A: e além disto, tiverem hum lado de hum igual a outro lado do outro (ou sejão os que estão entre os angulos iguaes, DG, CA; ou os oppostos a quaesquer delles) os triangulos serão totalmente iguaes; e por consequencia, terão iguaes respectivamente todos os angulos, e todos os lados.*

D*Em.* Supponhamos 1. que são iguaes os lados intermedios DG, CA. Consta do Esch. da Prop. 4.

Prop. 4. Supponhamos 2. que são iguaes os lados oppostos a iguaes angulos DH, CB. Porquanto os angulos D,G, são iguaes respectivamente aos angulos C, A; tambem os remanentes H, B serão iguaes [como constarà depois do Cor. 8. da Prop. 32. a qual não depende desta] logo jà os lados iguaes estão entre angulos iguaes; e por consequencia, &c.

PROPOSIÇÃO XXVII. *Theor.*

Se a recta GO, cortar duas parallelas BA, FC; serão 1. iguaes os angulos alternos RLO, LOQ. 2. serà o externo GLA, igual ao interno para a mesma parte LOC. 3. e serão os dous internos para a mesma parte ALO, LOC, iguaes a dous rectos. Fig. 43.

DEm. 1. part. Tire-se do ponto O, huma perpendicular à BA; e do ponto L, outra perpendicular a FC. As rectas OR, LQ, são perpendiculares à ambas as parallelas (*Ax.* 11.) são iguaes entre si (*Def.* 36.) e tomão das parallelas partes iguaes RL, OQ (*Ax.* 12.) são tambem iguaes, ou rectos, os angulos comprehendidos R, Q: logo os triangulos LRO, OQL são totalmente iguaes (*Prop.* 4.) e por consequencia os angulos alternos, oppostos a iguaes lados, RLO, LOQ, são iguaes entre si *Q. E &c.*

* Da igualdade destes se infere a igualdade dos outros alternos ALO, LOF (*Prop.* 13.)

2. Part. O angulo externo GLA, he igual ao seu verticalmente opposto RLO (*Prop.* 15.) porém este, como fica ditto, he igual a LOQ: logo o externo he igual ao interno para a mesma parte (*Ax.* 1.) *Q. E. &c.*

* Da mesma sórte se demonstra ser GLB, igual à LOF.

3 Part. O angulo ALO, he igual a LOF (1. *part.*) porèm este, juntamente com LOQ, fazem dous rectos (*Prop.* 13.) logo tambem aquelle; isto he, os dous internos para a mesma parte. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XXVIII. *Theor.*

Fig. 44. *Se a recta GO, cortando duas rectas AB, CF, fizer os angulos alternos ALO, LOF, iguaes entre si; as dittas rectas cortadas serão parallelas.*

DEm. Se o não são: passe pelo ponto L, outra qualquer recta XZ, parallela à CF. O angulo XLO, he igual ao seu alterno LOF (*Ant.*) porèm o angulo ALO, he igual ao mesmo, alterno pela hypothese: logo os angulos XLO, ALO, são iguaes entre si (*Ax.* 1.) isto he, a parte he igual ao todo; o que he absurdo, &c.

PROPOSIÇÃO XXIX. *Theor.*

Fig. 44. *Se a recta GO, cortando duas rectas AB, CF, fizer o angulo externo GLB, igual ao interno para a mesma parte LOF: ou tambem, os dous internos para a mesma parte BLO, LOF, iguaes a dous rectos; as duas rectas cortadas serão parallelas.*

DEm. 1. part. GLB, he igual a ALO, (*Prop.* 15.) porèm GLB, he igual a LOF (*Hypoth.*) logo os alternos ALO, LOF, são iguaes entre si (*Ax.* 1.) logo as duas rectas AB, CF, são parallelas (*Ant.*) *Q. E. &c.*

2. Part. LOC, LOF, são iguaes a dous rectos (*Prop.* 13.) porèm BLO, LOF, tambem são iguaes a dous rectos (*Hypoth.*) logo, tirado o commum LOF, os

os remanentes alternos LOC, BLO, ſerão iguaes entre ſi (*Ax.*2.) e por conſequencia, &c.

* Da 2. part. ſe ſegue que todo o rectangulo he parallelogra nmo.

PROPOSIÇÃO XXX. *Theor.*

Se duas rectas AB, CF, forem parallelas a huma terceira XZ; ſerão tambem parallelas entre ſi. Fig. 42.

D*Em.* Corte a recta GO, a todas tres. O angulo externo GLB, he igual ao interno para a meſma parte LDZ (*Prop.*27.) eſte meſmo, como externo, he tambem igual ao interno DOF: logo os dous GLB, DOF [iſto he, o externo, e o interno para a meſma parte] ſão iguaes entre ſi: logo as duas rectas AB, CF, ſão parallelas (*Ant.*) *Q. E. &c.*

* A demonſtração ſempre he a meſma; ou a recta XZ, caya dentro, ou fóra das duas parallelas.

PROPOSIÇÃO XXXI. *Probl.*

Dado hum ponto H, fóra de qualquer recta FC; tirar delle huma parallela à ditta recta. Fig. 43.

C*Onſtr.* Tire-ſe do ponto H (*à deſcripção*) huma recta HP, a qual corte a dada em P; e deſcreva-ſe do ponto P, com qualquer intervallo, o arco *eu*: deſcreva-ſe tambem do ponto H, com igual intervallo, outro arco *io.* igual ao primeiro; e tire-ſe a recta H*o* B; ſerà eſta a parallela, que ſe pede.

Dem. Conſta da Prop. 28. e da 1. praxe do Eſch. da Prop. 23.

* Outra praxe do Padre *Tacquet.* Dado o ponto O, fóra da recta BA, &c. Deſcreva-ſe hum circulo, o qual paſſe pelo ponto dado, e corte a recta dada em Fig. 46.

D ij quaeſ,

quaesquer dous pontos E, I: tomem-se destes dous pontos dous arcos iguaes EO, ID; e tire-se a recta OD: será esta a parallela, que se pede, &c. * Depende da Prop. 29. do l. 3.

ESCHOLIO.

Fig. 47. *Supposto, que lançamos fóra do numero dos Axiomas o* 11. *de* Euclides, *por não ser evidente: pede a razão que o demonstremos aqui, por ter muita connexão com a Prop.* 29.

Se a recta RX, cortar duas rectas DE, XV; e fizer para qualquer das partes dous angulos internos EDX, DXV, menores que dous rectos; as dittas rectas, continuadas para a mesma parte, concorrerão finalmente em algum ponto O.

Dem. *Tire-se a recta XZ, parallela à* DE; *e sejão os angulos EDX, DXZ, iguaes a dous rectos* (Prop. 27.) *He evidente, que entre as rectas XV, XZ, continuadas infinitamente, se póde tirar huma parallela à XD, a qual seja mayor que ella: seja pois esta ZS; e faça-se XR, igual a ella; e ajuntem-se os pontos R, S. Porquanto as rectas XR, ZS, são parallelas* (Constr.) *serão os angulos alternos RXS, XSZ, entre si iguaes* (Prop. 27.) *são tambem iguaes respectivamente os lados que os comprehendem* (Constr.) *logo os angulos RSX, SXZ oppostos a iguaes lados, são iguaes* (Prop. 4.) *logo as rectas RS, XZ são parallelas* (Prop. 28.) *porém a recta DE, tambem he parallela à XZ* (Constr.) *logo as rectas DE, RS são parallelas entre si* (Prop. 30.) *e por consequencia não podem concorrer para nenhuma parte* (Def. 36.) *logo DE, continuada, necessariamente ha de cortar a recta XS, em algum ponto O. Q. E. &c.*

PROPO-

PROPOSIÇÃO XXXII. *Theor.*

Em todo o triangulo BCA, qualquer angulo externo OCA, he igual aos dous internos oppostos B, A: e todos os tres internos juntos C, B, A, são iguaes precisamente a dous rectos. Fig. 41.

DEm. 1. part. Tire-se CH, parallela à BA. Porquanto OB, corta as parallelas CH, BA; será o angulo externo OCH, igual ao interno para a mesma parte B (*Prop.*27.) e porquanto CA, corta as mesmas parallelas, será o angulo HCA, igual ao alterno A (*p la mesma Prop.*) logo todo o angulo externo OCA, he igual aos dous internos oppostos B, A. *Q.E.&c.*

COROLLARIOS.

1 O Angulo externo OCA, sempre he mayor, que qualquer dos internos oppostos B, A, (*Ax.*9.)

2 De dous angulos E, O, insistentes sobre a base GH, de qualquer triangulo, o mayor he o que cahe dentro. *Dem.* Continue-se GO, até D. O angulo GDH, he mayor que E (*Cor. ant.*) o angulo GOH, he mayor que GDH (*pelo mesmo Cor.*) logo he muito mayor que E. *Q. E. &c.* Fig. 40.

3 Se de hum ponto Z, se tirarem duas rectas a outra terceira CD; huma obliqua ZQ, e outra perpendicular ZO; cahirà esta para a parte do angulo agudo ZQC: *Dem.* Caya (se for possivel) para a parte do angulo obtuso ZQD; e seja ZR: logo serà o angulo agudo ZQC, mayor que o recto ZRC (*Cor.*1.) contra Def. 15. Fig. 52.

2 Part. O angulo externo OCA, he igual aos dous internos oppostos A, B (1.*part.*) porém o mes- Fig. 41.

mo

mo externo, juntamente com o interno conjuncto ACB, são iguaes a dous rectos (*Prop.* 13.) logo os tres internos juntos C, B, A, são iguaes a dous rectos. *Q. E. &c.*

Fig. 50. * Por outro modo: Tire-se HL, parallela à base. Os alternos *a. i.* e os alternos *o. u.* são respectivamente iguaes (*Prop.* 27.) porèm *a. e. o.* são iguaes a dous rectos (*Cor.* 1. *da* 13.) logo tambem *i. e. u. Q. E. & c.*

COROLLARIOS.

4 OS tres angulos de qualquer triangulo são iguaes aos outros tres de outro qualquer triangulo; tomados todos juntos.

5 Se em qualquer triangulo for hum angulo recto; os outros dous farão outro recto. E,

6 Se hum angulo for recto, os outros dous serão agudos.

Fig. 17. 7 Se o angulo A, de hum triangulo for igual aos outros dous B, C, do mesmo triangulo; o primeiro serà recto.

8 Conhecidos os gráos de hum angulo de qualquer triangulo, conhecem-se tambem os gráos dos outros dous juntos. E conhecidos os gráos de quaesquer dous juntos, conhecem-se tambem os gráos do terceiro: porque todos tres fazem sempre a summa de 180. gráos.

9 Se dous angulos de hum triangulo (ou separados, ou juntos) forem iguaes a outros dous de outro qualquer triangulo; tambem o terceiro serà igual ao terceiro.

10 Se dous triangulos tiverem hum angulo igual; tambem as summas dos outros dous serão iguaes.

11 Quando em hum triangulo Isósceles o angulo comprehendido dos lados iguaes for recto; os outros dous serão semi-rectos. E em todo o triangulo Isósceles os angulos sobre a base são agudos.

12 Qualquer angulo de hum triangulo equilatero he a terceira parte de dous rectos, ou duas terças de hum recto;

recto; isto he, consta de 60. gráos. E

13 Daqui se tira hum modo facil de dividir em tres partes iguaes qualquer angulo recto BAC: porquanto, se se formar sobre qualquer dos lados AC, hum triangulo equilatero AHD (*Prop.* 1.) será o angulo BAH, a sua terceira parte. Fig. 51.

14 A perpendicular ZO, he a mais curta de quantas rectas se podem tirar de hum ponto Z, a qualquer recta CD. *Dem.* Por ser o angulo O, recto, será qualquer ZQO, agudo (*Cor.*6.) logo sempre ZO, opposta ao menor angulo, ha de ser menor que ZQ, opposta ao mayor (*Prop.*19.) Fig. 52.

15 De hum ponto Z, não se póde tirar mais que huma perpendicular à qualquer recta CD.

ESCHOLIO.

Deste fecundissimo Theorema, cujo uso he mui frequente por toda a Geometria, foy inventor Pythagoras, *como diz* Eudemo. *Delle faz menção muitas vezes* Aristoteles; *e o traz por exemplar de huma perfeita demonstração. Por meyo delle se sabe, não sómente quantos angulos rectos fazem os tres de qualquer triangulo; senão tambem todos os angulos de qualquer Polygono: e não sómente os internos; senão tambem os externos, como veremos nos tres seguintes Theoremas.*

Theorema I.

OS 4. angulos de qualquer quadrangulo AC, fazem precisamente 4. rectos. Fig. 53.

Dem. *Tire-se a diagonal DB; e resolva-se o quadrangulo em dous triangulos. Os* 3. *angulos de cada hum destes triangulos fazem precisamente* 2. *rectos* (Ant.) *logo todos* 6. (*isto he, os* 4. *da figura*) *fazem* 4. *rectos.*

Theore-

Theorema 2.

Fig. 54. OS angulos internos de qualquer Polygono, fazem tantas vezes 2. rectos (menos 4.) quantos são os lados da figura.

Dem. *Tirem-se de qualquer ponto O, tomado dentro da figura, rectas a todos os angulos; e resolva-se o polygono em outros tantos triangulos, quantos são os lados. Os 3. angulos de cada hum destes triangulos fazem precisamente 2. rectos: porèm os angulos dos dittos triangulos são os mesmos que os do Polygono, com mais 4. rectos, formados no ponto O* (Cor. 3. da Prop. 13.) *logo os angulos do Polygono fazem tantas vezes 2. rectos (menos 4.) quantos são os lados da figura.*

Theorema 3.

Fig. 55. TOdos os angulos externos de qualquer Polygono fazem precisamente 4. rectos.

Dem. *Os externos juntamente com os internos fazem tantas vezes 2 rectos, quantos são os lados da figura* (Prop. 13.) *porèm os internos juntamente com 4 rectos fazem a mesma summa* (Theor. ant.) *logo os externos fazem precisamente 4 rectos* * *He cousa admiravel; que por mais lados, que tenhão as figuras rectilineas; sempre a summa dos angulos externos he a mesma.*

PROPOSIÇÃO XXXIII. *Theor.*

Fig. 56. *Se duas rectas BC, AD, ajuntarem os extremos de outras duas AB, DC, iguaes, e parallelas; tambem ellas serão iguaes, e parallelas entre si.*

DEm. Tire-se a transversal AC. Os angulos alternos BAC, ACD, são iguaes (*Prop.* 27.) são tam-

tambem respectivamente iguaes os lados, que os comprehendem (*Hypoth.*) logo as bases BC, AD, serão iguaes (*Prop. 4.*) *Que era o 1.* Alêm das bases, são tambem iguaes os angulos sobre as bases BCA, CAD, oppostos a iguaes lados: logo as mesmas bases BC, AD, são tambem parallelas (*Prop. 28.*) *Que era o 2.*

PROPOSIÇÃO XXXIV. *Theor.*

Em qualquer parallelogrammo BD, os angulos, e os lados oppostos são iguaes: e a diagonal AC, o divide pelo meyo, em dous triangulos iguaes, e semelhantes. Fig. 56.

DEm. Porquanto BC, AD, são parallelas (*Def. 35.*) e a estas corta a recta AC; serão os angulos alternos BCA, CAD, iguaes (*Prop. 27.*) pela mesma razão são tambem iguaes os outros alternos BAC, ACD: logo o total A, he igual ao total C; e pelo mesmo discurso, B, he igual à D. *Que era o 1.*

Tendo os triangulos ABC, ADC, huma mesma base; e sendo os angulos a ella adjacentes respectivamente iguaes (como fica ditto) serão iguaes os lados, oppostos a iguaes angulos; isto he, será AD, igual à BC; e AB, igual à DC; e serão os dittos triangulos totalmente iguaes (*Prop. 26.*) *Que era o 2. e 3 &c.*

E S C H O L I O.

Deste Theorema, e da Def. 1. do l. 2. se tira o modo de medir qualquer parallelogrammo rectangulo, que he o seguinte. Meção-se quaesquer dous lados, que comprehendem hum dos quatro angulos rectos, com huma

ma

Fig. 57. *ma medida commua; e ſeja v.g. o lado BA, de 4. palmos, e AC de 9. multiplique-ſe hum numero por outro; e o producto que he 36. ſerà o numero dos palmos quadrados, de que conſta a area do ditto pa-*
Fig. 58. *rallelogrammo. Para medir hum quadrado, baſtarà medir hum ſó lado; e multiplicallo por ſi meſmo.*

Dem. *Conſta da Prop. ant. que divididos quaeſquer lados conjunctos com huma medida commua, deſde hum meſmo ponto A; e tiradas pelos pontos das diviſões parallelas aos lados oppoſtos; todos os lados, e angulos dos parallelogrammos pequenos, em que ſe reſolvem os grandes, ſão iguaes entre ſi: logo ſão quadrados* (Def.32.) *e tantos em numero, quantos indica o producto dos numeros dos lados.* Advirta-ſe que aſſim como pela multiplicação de hum lado por outro ſe ſabe o numero dos palmos quadrados, de que conſta o parallelogrammo; aſſim tambem pela diviſão deſte producto por qualquer dos lados, ſe ſabe o numero de palmos, de que conſta o outro lado.*

PROPOSIÇÃO XXXV. e XXXVI. *Theor.*

Fig. 59. *Os Parallelogrammos EN, EL, que eſtão ſobre a meſma, ou igual baſe EO, e entre as meſmas parallelas EX, ML, ſão iguaes.*

D*Em.* Os triangulos MEB, NOL ſão reſpectivamente equilateros: porquanto EM, ON; aſſim como EB, OL, ſão iguaes (*Prop.*34.) e MB, NL, compoſtos de duas partes iguaes MN, BL (por ſerem iguaes a huma terceira EO) e de huma commua NB, tambem ſão iguaes (*Ax.*2.) logo os dittos triangulos ſão totalmente iguaes (*Prop.*8.) logo tirando-lhes o triangulo commum NAB, e ajuntando-lhes o outro commum EAO,

EAO, os parallelogrammos, que resultão, EN, EL, serão iguaes. *Q.E.&c.*

* Este Theorema (o qual se farà mais universal na Prop. 1. do l. 6.) he verdadeiramente admiravel: pois ainda que o parallelogrammo EN, seja rectangulo, e o mais curto de quantos se pòdem dar entre aquellas parallelas; e o outro EL, obliquangulo, e o mais estendido, que se possa imaginar entre as mesmas parallelas, sempre hande ser iguaes.

ESCHOLIO.

Deste Theorema se colhe tambem o modo de medir qualquer parallelogrammo obliquangulo; que he multiplicando a base pela altura: donde, se a base EO, for de 3. palmos, e altura LX, de 6. serà a area do parallelogrammo EL, de 18. quadrados. A razão he, porque o parallelogrammo obliquangulo EL, he igual ao rectangulo EN: porèm este mede-se, multiplicando a base EO, pela altura ME, ou LX (Esch. ant.) *logo tambem aquelle. Que cousa seja altura de hum parallelogrammo, ou triangulo, constarà despois da Def. 3 do l. 6.*

PROPOSIÇÃO XXXVII. e XXXVIII. *Theor.*

Os triangulos EMO, EBO, postos sobre a mesma, ou igual base EO, e entre as mesmas parallelas EX, ML, são iguaes entre si. Fig. 60.

D*Em.* Tirem-se ON, OL, parallelas aos lados EM, EB. Os parallelogrammos EN, EL, são iguaes (*Ant.*) porèm os triangulos EMO, EBO, são metades suas (*Prop.* 34.) logo tambem serão iguaes entre si (*Ax.* 6.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XXXIX. e XL. *Probl.*

Fig. 61. *Os triangulos iguaes ACO, ABO, postos sobre a mesma, ou igual base AO, de huma mesma recta; e virados para a mesma parte, estão entre as mesmas parallelas AO, CB.*

DEm. Se as dittas rectas não são parallelas; seja CD, parallela a AO; e continuado qualquer lado AB, do mais baixo triangulo, atè que occorra à ditta parallela em D, ajuntem-se os pontos O, D. Porquanto AO, CD, são parallelas (*Hypoth.*) serão iguaes os triangulos ACO, ADO (*Ant.*) porèm tambem se suppoem iguaes os triangulos ACO, ABO: logo os dous ADO, ABO, são iguaes entre si; isto he, o todo, e a parte, contra o Ax. 9.

PROPOSIÇÃO XLI. *Theor.*

Fig. 62. *O trianguloEBO, posto sobre a mesma, ou igual base EO, e entre as mesmas parallelas EX, ML, com o parallelogrammo EN, he a sua metade.*

DEm. Tire-se a diagonal OM. Os triangulos EMO, EBO, são iguaes entre si (*Prop.* 37.) porèm EMO, he metade do parallelogrammo EN (*Prop.* 34.) logo tambem o serà EBO. *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

Deste Theorema, e do Esch da 34. *se tira o modo de medir qualquer triangulo EBO; que he multiplicando*

do a base por metade da altura; ou a altura por metade da base: v.g. seja a base EO, de 4. palmos, e a altura LX, de 6. serà a area do triangulo de 12. quadrados. A razão he; porque qualquer triangulo EOB, he igual ao triangulo rectangulo EMO (Prop. 37) *porèm este, como metade do parallelogrammo rectangulo EN* (Prop. 34.) *mede-se, multiplicando a base EO, por metade da altura ME, ou LX; ou esta por metade daquella [como facilmente se infere do Esch. da mesma 34.] logo &c.*

Advirta-se que no triangulo rectangulo EMO, os lados que comprehendem o angulo recto E, são mutuamente altura, e base do mesmo triangulo; como constarà da Def. 3. do l. 6.

PROPOSIÇÃO XLII. *Probl.*

Construir hum parallelogrammo igual a hum triangulo dado EOB; o qual tenha hum angulo igual ao outro dado Q. Fig. 63.

Constr. Divida-se a base EO, pelo meyo em G, (*Prop.* 10.) e forme-se em G, hum angulo igual ao dado Q (*Prop.* 23.) tire-se do ponto O, huma parallela ao lado GM (*Prop.* 31) e do ponto B, outra parallela à base EO: serà GN, o parallelogrammo, que se pede.

Dem. Tire-se a recta GB. Os triangulos EBG, GBO, são iguaes (*Prop.* 37.) logo o triangulo EBO, he duplo de cada hum: porèm o parallelogrammo GN, tambem he duplo de GBO (*Ant.*) logo he igual ao ditto triangulo (*Ax* 6) Tem tambem o ditto parallelogrammo o angulo G, igual à Q (*Constr.*) logo &c.

CORO.

COROLLARIO.

PAra se formar hum rectangulo igual ao ditto triangulo; não ha mais, que levantar GM, perpendicular à base.

PROPOSIÇÃO XLIII. *Theor.*

Fig. 64. 65. *Em todo o parallelogrammo BA, os Complementos LE, GF* (Def. 37.) *são iguaes entre si.*

DEm. Os triangulos totaes BDA, BCA, tem todos os lados respectivamente iguaes; e são totalmente iguaes entre si (*Prop.* 34.) porém, pela mesma razão, tambem são iguaes entre si os triangulos parciaes OEA, OFA; como tambem BLO, BGO: logo, tirando os 4. ultimos dos 2. primeiros, os residuos; isto he, os 2. complementos LE, GF, serão iguaes (*Ax.* 3.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XLIV. *Probl.*

Fig. 65. 65. 65. *Sobre a recta FO, construir hum parallelogrammo igual a hum triangulo dado X; o qual tenha hum angulo igual a outro dado Q.*

COnstr. Continue-se à descripção a recta FO; e forme-se sobre a parte accrescentada hum parallelogrammo OD, igual ao triangulo dado X; o qual tenha hum angulo O, igual ao dado Q (*Prop.* 42.) tire-se pelo ponto F, huma parallela à EO (*Prop.* 31.) à qual

qual occorra DE, continuada em A: formado assim o parallelogrammo FE, tire-se a diagonal AO, à qual continuada occorra DL, tambem continuada em B; e do ponto B, tire-se outra parallela à FL, àqual occorrão continuadas EO em G, e AF em C: será o parallelogrammo FG, o que se pede.

Dem. FG, he parallelogrammo (*Constr.*) está formado sobre a recta dada FO: he igual ao parallelogrammo OD (*Ant.*) e por consequencia ao triangulo X (*Constr.*) e finalmente tem o angulo O, igual à Q (*Prop.* 15.) logo, &c.

PROPOSIÇÃO XLV. *Probl.*

Dado hum rectilineo ABC, e a recta PE; construir sôbre esta hum parallelogrammo igual àquelle; o qual tenha hum angulo igual a outro dado O. Fig 64, 66.

COnstr. Tirem-se as rectas BA, BC; e resolva-se o rectilineo dado nos triangulos X, Y, Z. Sobre a recta PE, forme-se hum parallelogrammo PF, igual ao triangulo Z; o qual tenha hum angulo P, igual ao dado O (*Ant.*) Estenda-se PR, á descripção, e formese sobre o lado RF, outro parallelogrammo RG, igual à Y; e sobre o lado SG, outro SV, igual à X: digo, que PV, he o parallelogrammo que se pede.

Dem. Primeiramente PV, he igual ao rectilineo dado (*Constr.*) he tambem parallelogrammo [o que demonstro: RF, parallela à PE, he tambem parallela à SG; e esta parallela á TV: logo PE, TV, são parallelas (*Prop.* 30.) item PT, he parallela as partes EF, FG, &c. logo tambem a toda a EV] logo, &c. Resta provar que EV, seja huma recta; porèm isto se prova facilmente: porquanto, os angulos EPR, PRF, são iguaes a dous rectos (*Prop.* 27.) porèm EPR, he igual a EFR (*Prop.* 34.) e PRF,

e PRF, à RFG (*Prop.*27.) logo tambem os dous angulos em F, são iguaes a dous rectos: logo EG, he huma linha recta (*Prop* 14.) e pela mesma razão toda a EV. *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

Deste Theorema se colhe o modo de conhecer o excesso, que tem hum rectilineo X,Y,Z, sobre outro Y,Z: porquanto, formado sobre qualquer recta hum parallelogrammo PV, igual ao rectilineo mayor; e outro PG, igual ao menor; serà o residuo SV, o excesso, que se busca.

Fig.67. *Porém a praxe mais expedita de reduzir qualquer quadrangulo ABCD, a hum rectangulo, he a seguinte; a qual servirà despois para a Prop.* 14 *do l.* 2.

Divida-se o quadrangulo proposto em dous triangulos ABC, ADC; e tirem-se dos vertices destes as rectas BO, DO, perpendiculares à diagonal AC: divida-se esta pelo meyo em E; e levante-se a perpendicular EV, igual às outras duas BO, DO: digo que o rectangulo VEC, he igual ao quadrangulo ABCD. Consta manifestamente da Prop. 41.

PROPOSIÇÃO XLVI. *Theor.*

Fig. 68. *Sobre a recta AB, construir hum quadrado AD.*

Constr. Levantem-se dos termos da recta dada duas perpendiculares iguaes a ella, AC, BD (*Prop.* 11.) e ajuntem-se os pontos C, D, &c.

Dem. Os angulos A, B, são rectos: logo as rectas AC, BD, são parallelas (*Prop.* 28.) são tambem iguaes entre si (*Constr.*) logo as rectas AB, CD, tambem são iguaes, e parallellas (*Prop.* 33.) logo AD, he hum parallé-

rallelogrammo equilatero: he tambem rectangulo; por têr os angulos oppostos A, D; B, C, iguaes, e rectos (*Prop.* 34.) logo he quadrado (*Def.* 32.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XLVII. *Theor.*

Em todo o triangulo rectangulo PBQ, o quadrado do lado PQ, opposto ao angulo recto B, he igual aos dous quadrados juntos dos outros dous lados PB, QB. Fig. 69.

DEm. Tirem-se as rectas BE, PC; e do ponto B, a recta BR, parallela à QE. Os triangulos PQC, BQE, tem os angulos, indicados pelas mesmas letras, iguaes [por serem compostos de dous rectos, e de hum commum] e tem os lados, que comprehendem os dittos angulos, respectivamente iguaes (*Def.* 32.) logo os dittos triangulos são totalmente iguaes (*Prop.* 4.) Estão tambem entre duas parallelas, e tem as mesmas bases, o primeiro com o quadrado QH, e o segundo com o parallelogrammo QR: logo são metades delles (*Prop.* 41.) e por consequencia, o quadrado QH, he igual ao parallelogrammo QR (*Ax.* 6.) Da mesma sorte provarei, que o quadrado PF, he igual ao outro parallelogrammo PR: logo todo o quadrado PE, opposto ao angulo recto B, he igual aos outros dous quadrados QH, PF. *Q. E. &c.*

* Suppuz na demonstração que PH, era huma linha recta: porèm isto se prova facilmente pela 14. por serem os dous angulos em B, rectos.

ESCHOLIO.

Deste Theorema [o qual na Prop. 31. do l. 6. se farà universal para todas as figuras semelhantes] foy inven-

tor

tor Pythagoras; *o qual* (*como diz* Vitruvio *no l. 9.*) *sacrificou às Musas cem bois; por lhe inspirarem huma tam subtil invenção, como elle suppunha. Que confusão esta para os que temos conhecimento do verdadeiro Deos! Pois recebendo continuamente daquelle Pay das Luzes tantas, e tam vivas illustrações, não fazemos mais, que serrar os olhos para o reconhecimento.*

O uso deste admiravel Theor. he frequentissimo por toda a Geometria. Elle he a chave mestra, com que se abrem os seyos da Quantidade, e se descobrem os segredos das linhas Incômensuraveis, de que trata Euclides *em todo o l.* 10. *Delle parece que teve principio aquelle celebre proloquio, tam decantado nas Escholas dos Antigos Geometras, especialmente de* Plataõ, e Aristoteles: Que o lado do quadrado era incômensuravel com o seu diametro: *verdade tam patente, que* Plataõ *dizia, era bruto, e não homem, o que a ignorava.*

Alguns suspeitão, que a invenção deste Theor. foy mais casualidade, que industria de Pythagoras; *e que contemplando as proporções destes tres numeros* 3. 4. 5. *e a de seus quadrados; e comparando a com a de outros muitos seus compostos* 6 8 10.*9.12 15.*&c viera a dar, tentando, na sua universalidade: porèm não ha razão, porque tiremos esta gloria a hum tam grande Homem. Para prova do muito, que delle se infere, porei aqui tres Problemas, que sobre serem utilissimos, não excedem a capacidade dos principiantes.*

Problema I.

Fig. 70. Dados muitos quadrados, formar hum igual a todos.

70.

D*Em-se v.g. tres quadrados, cujos lados sejão as rectas* 1.2.3. *e deseje-se hum igual a todos. Forme-se hum angulo recto* ZDE; *e transfirão-se para os lados delle, de* D *em* P, *e de* D *em* G, *as duas rectas*

mais

mais pequenas 3. 2. ajuntem-se os extremos G, P, com outra recta; e transfira-se esta para qualquer dos lados, de D em Q, e a terceira 1. para o outro lado, de D em L: tornem-se a ajuntar os extremos L, Q, com outra recta; e serà esta o lado do quadrado, igual a todos tres.

Dem. *O quadrado LQ, he igual aos dous DL, DQ* (Ant.) *porém DQ, ou GP, he igual aos dous DG, DP: logo o quadrado LQ, he igual aos tres DL, DG, DP; isto he, aos quadrados de 1. 2. 3. Q. E. &c.*

Problema 2.

Dadas duas rectas desiguaes CD, CE, achar o lado do quadrado, em que o da mayor CD, excede o da menor CE. Fig. 71.

DEscreva-se hum circulo com o intervallo da mayor CD; e transfira-se ao diametro, começando do centro, a menor CE: levante-se do ponto E, huma perpendicular ED, até à circunferencia, e serà esta o lado do quadrado, que se busca.

Dem. *O quadrado CD, he igual aos dous CE, ED* (Ant.) *logo o quadrado ED, he o excesso do quadrado CD, sobre CE.*

Problema 3.

Conhecidos quaesquer dous lados de hum triangulo rectangulo BAC, conhecer o terceiro. Fig. 72.

SEjão 1. conhecidos os lados, que comprehendem o angulo recto; v.g. AB, de 8. e AC, de 6. palmos; e deseje-se conhecer a hypotenusa BC. Quadrem-se os numeros 8. e 6. e ajuntem-se os productos 64. e 36. em huma summa 100. serà esta o quadrado do lado BC; e a sua raiz 10. o mesmo lado. Sejão 2. conhecidos os lados, que comprehendem qualquer angulo agudo B; v.g. AB, de 8.

de 8. e CB de 10. palmos; e deseje-se &c. Quadrem-se os numeros 8 e 10. e tirese o quadrado menor 64. do quadrado mayor 100. será o residuo 36. o quadrado do outro lado AC; e a sua raiz 6. o mesmo lado. Consta do ditto.

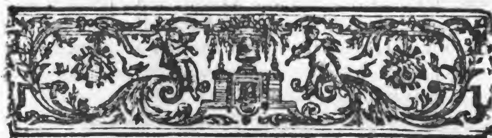
PROPOSIÇÃO XLVIII. *Theor.*

Fig. 73. *Se no triangulo CBA, o quadrado do lado CA, for igual aos quadrados dos outros dous lados CB, AB; o angulo B, opposto ditto lado CA, será recto.* * He conversa da ant.

D*Em.* Levante-se do ponto B, a perpendicular BO, igual à BA; e tire-se a recta OC. O quadrado OC, he igual aos dous quadrados CB, OB (*Ant.*) isto he, pela constr. aos dous CB, AB: logo he igual ao quadrado CA (*Ax.* 1.) logo os triangulos OBC, ABC, tem tódos os lados respectivamente iguaes: logo os angulos em B, oppostos a iguaes lados, são iguaes entre si (*Prop.* 8. porèm hum he recto pela construcção: logo tambem o outro. *Q. E. &c.*



ELE-



ELEMENTOS DE GEOMETRIA.

LIVRO II.

ESTE LIVRO (DIZ O PADRE Tacquet) *he tam pequeno no corpo, como grande na utilidade, e ſubtileza. Eu o conſidero pelo primeiro fundamento da Algebra; razão porque, ſeguindo o eſtylo do ditto Author, me reſolvi a expollo abſtrahido de figuras; para que jà desde aqui ſe coſtumem os principiantes a conſiderar a Quantidade* in abſtracto, *ao modo dos Analyſtas.*

DEFINIÇÕES.

1 PARALLELOGRAMMO Rectangulo; ou abſolutamente o Rectangulo ABDC, ſe diz ſer *Comprehendido* de quaeſquer dous lados BA, AC, que formao hum dos ſeus angulos rectos. Fig. 1.

* O Rectangulo, como ſe colhe das Def. 31 e 36. do L. ant. ſe produz do movimento de huma perpendicular

cular ſobre outra; iſto he, do lado BA, ſobre o lado AC: ou do lado CA, ſobre o lado AB. Donde, como eſtes dous lados ſão iguaes aos ſeus oppoſtos *(Prop. 34. do l. ant.)* e ou por ſi, ou por elles, formão os 4. angulos da figura; abſolutamente ſe diz ſer o ditto rectangulo *Comprehendido* de quaeſquer dous lados, que formão hum dos ſeus angulos rectos.

Daqui ſe ſegue, que dada huma recta, cortada como quer em hum ponto; para determinar qualquer dos rectangulos, que ſe pòdem formar, ou das ſuas partes, ou da meſma com qualquer dellas; baſtarà nomear 3. letras, com que eſtão notados os ſeus termos, e o ponto da ſecção; complicando-as porèm differentemente, ſegundo forem os rectangulos: porquanto com as duas primeiras ſe determinarà hum lado, e com as Fig. 2. duas ultimas o outro. *Exemplo.* Dê-ſe a recta AB, cortada como quer em C: digo, que o rectangulo ABC, he o comprehendido de toda a AB, e da parte BC: o rectangulo BAC, he o comprehendido da meſma toda BA, e da outra parte AC: e o rectangulo ACB, ou BCA, he o comprehendido das duas partes.

Do ditto ſe infere, que para ſe determinar qualquer quadrado, dos 3. que ſe pòdem formar; ou de cada huma das partes, ou de toda a recta, baſtarà nomear ſòmente duas letras; como por ſi he manifeſto.

Fig. 64. e 65. do L. 1. 2 *Gnomon*: he o rectilineo LDACGO; ou EDBCFO; compoſto de qualquer dos parallelogrammos, exiſtentes ſobre o diametro, EF, ou LG; e de ambos os complementos LE,GF. Veja-ſe a Def. 37. do l ant.

* Eſta definição he eſcuſada no noſſo methodo: porèm, como hade ſervir no l. 13. a deixo ficar aqui, aonde a poz *Euclides*.

NOTA

NOTA.

ESte signal { Significa *conjunção, ou alligação de algumas quantidades.*
Rect. ou RRect. Significa *rectangulo, ou rectangulos.*
Quad. ou QQuad Significa *quadrado, ou quadrados.*
* Quanto às citações deste livro; como tambem dos seguintes, se advirta, que aonde se achar hum só numero entre parenthesis, he citação de alguma proposição do mesmo livro; porèm aonde se acharem dous, distinctos com hum pontinho; o primeiro he citação da Prop e o segundo do livro, aonde ella pertence: v.g. (47. 1.) quer dizer pela 47. do l. 1.

PROPOSIÇÃO I. *Theor.*

Dadas duas rectas BA, AC, a primeira inteira, e a segunda cortada em quaesquer partes AX, XZ, ZC: serà o Rect. BAC, comprehendido da inteira, e da cortada, igual a todos os rectangulos juntos, comprehendidos da mesma inteira, e de cada huma das partes da cortada, BAX: BA,XZ: BA,ZC. Fig. 1.

DEm Levantem-se das secções X, Z, as perpendiculares XO, ZO; e formem-se os rectangulos BX,OZ,OC.
O Rect. BAC, he igual aos RRect. { BAX / OXZ / OZC.
(Por ser o todo igual a todas as suas partes juntas.)
Porèm as perpendiculares OX,OZ, são iguaes à AB (*Def* 36. 1.) logo, substituindo esta por cada huma daquellas

quellas serà o Rect. BAC, igual aos RRect. { BAX
BA,XZ
BA,ZC.
Q.E.&c.

ESCHOLIO.

AS 10 primeiras proposições, todas se podem explicar por numeros; e o exemplo se porà abaixo na Prop. 8,

PROPOSIÇÃO II. *Theor.*

Fig. 2. *Dada a recta AB, cortada como quer em C; serão os dous rectangulos ABC, BAC; comprehendidos da toda, e de cada huma das partes, iguaes ao quadrado da mesma toda AB.*

DEm. Tome-se a recta D, igual à AB. O Rect. D, AB, he igual aos RRect. { D,AC (*Ant.*)
D,CB.

Logo substituindo AB, pela sua igual D, serà o Quad. AB, igual aos RRect. { BAC Q. E. &c.
ABC.

PROPOSIÇÃO III. *Theor.*

Fig. 3. *Dada a recta BA, cortada como quer em C; serà o rectangulo BAC, comprehendido da toda, e de qualquer das partes CA, igual ao rectangulo das partes BCA, junto com o quadrado da mesma parte CA.*

DEm. Tome-se a recta D, igual à AC. O Rect. D,BA, he igual aos RRect. { D,BC (1.)
D,CA.

Logo substituindo CA, pela sua igual D, serà o Rect. BAC, igual ao { Rect. BCA Q.E.&c.
Quad. CA.

PROPO-

PROPOSIÇÃO IV. *Theor.*

Dada a recta AB, cortada como quer em C; será o quadrado da toda igual aos dous quadrados das partes AC, CB, juntamente com dous rectangulos das mesmas partes ACB. Fig. 4.

DEm. O Quad. AB, he igual aos dous RRect.
{ ABC (2.)
{ BAC.

Porém o Rect. ABC, he igual ao { Rect. ACB (3.) { Quad. CB.

e o Rect. BAC, he igual ao { Rect.BCA (3.) { Quad. AC.

Logo o Quad.AB, he igual ao { Quad. AC { Quad. CB { 2.RRect.ACB, BCA.

isto he ao mesmo, tomado duas vezes. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO V. *Theor.*

Dada a recta AB, cortada igualmente em O, e desigualmente em C; será o rectangulo das partes desiguaes ACB, juntamente com o quadrado da parte intermedia OC, igual ao quadrado da metade da recta dada OB. Fig. 5.

DEm. O Rect. ACB, he igual aos RRect.
{ AO,CB (1.)
{ OCB.

Porém, pela igualdade das rectas AO, OB, o Rect. AO,CB, he igual ao Rect. OBC; e elle ao Rect.

 OCB,

OCB, juntamente com o Quad.CB (3.)

Logo o Rect.ACB, he igual à { 2. RRect. OCB
Quad. CB.

Logo, accrescentando a ambas as partes o Quad. OC. serà o { Rect. ACB
Quad. OC. } igual à { 2. RRect. OCB
Quad. CB
Quad. OC.

isto he, ao Quad. OB (4.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO VI. *Theor.*

Fig. 6. *Se â recta CE, cortada pelo meyo em O, se lhe accrescentar outra recta EA; serà o rectangulo CAE, comprehendido da composta CA, e da accrescentada EA, juntamente com o quadrado da metade da dada OE, igual ao quadrado da composta da metade da mesma dada, e da accrescentada OA.*

D*Em.* Tome-se da outra parte da recta dada a recta BC, igual a EA. Consta da Constr. que BO, he igual a OA; e que BA, està cortada igualmente em O, e desigualmente em E.

Logo { o Rect. BEA
Quad. OE. } são iguaes ao Quad. OA (*Ant.*)

Porém, pela igualdade das rectas BE, CA, o Rect. BEA, he igual ao Rect. CAE.

Logo { o Rect. CAE
Quad. OE. } são iguaes ao Quad. OA. *Q. E. &c.*

PROPO-

PROPOSIÇÃO VII. *Theor.*

Dada a recta AB, cortada como quer em C; serão os quadrados AB, AC(o primeiro da toda, e o segundo de qualquer das partes) iguaes a dous rectangulos BAC, comprehendidos da mesma toda, e da mesma parte, juntamente com o quadrado da outra parte CB. Fig 7.

DEm. O Quad. AB, he igual à { 2. Rect. ACB (4.) / Quad. AC / Quad. CB. }

Logo accrescentando a ambas as partes o Quad. AC, serão os QQuad. { AB / AC. } iguaes à { 2. RRect. ACB / 2. QQuad. AC / Quad. CB. }

Porêm os 2. RRect. ACB, juntamente com 2. QQuad. AC, são iguaes à 2. RRect. BAC (3.)

Logo os QQuad. { AB / AC. } são iguaes à { 2. RRect. BAC / Quad. CB. }

Q. E. &c.

PROPOSIÇÃO VIII. *Theor.*

Se â recta AC, cortada pelo meyo em O, se lhe accrescentar a recta CB; serà o rectangulo AOB, comprehendido da metade da dada AO, e da composta da outra metade, e da accrescentada OB, tomado 4. vezes, juntamente com o quadrado da mesma accrescentada CB, igual ao quadrado de toda a composta AB. Fig. 8

(Ant.)

Dem. Os QQuad. { OB / OC } são iguaes à { 2. RRect. BOC / Quad. CB. }

 Logo,

Logo, accrescentando a ambas as partes 2. RRect. AOB, serão { 2. RRect. AOB iguaes à { 2. RRect. AOB
Quad. OB / 2. RRect. BOC
Quad. OC, ou AO. / Quad. CB.
(isto he o Quad. AB (4.)

isto he (pela igualdade dos rectangulos BOC, AOB) ao mesmo Rect. AOB, tomado 4. vezes, juntamente com o Quad. CB. *Q.E.&c.*

Exemplo: seja AC, 10. e CB, 4. Será o Rect. AOB, 45. que tomados 4. vezes fazem 180. e será o Quad. CB, 16. que juntos àquella summa fazem 196. Porém destes mesmos consta o Quad. de toda a composta AB. 14. logo &c.

ESCHOLIO.

EUclides *propoem este Theorema de outra sorte. Se á recta OB, cortada como quer em C, se lhe accrescentar AO, igual à qualquer das partes OC: será o rectangulo AOB, da dada, e da accrescentada, tomado 4. vezes, junto com o Quad. CB, da outra parte, igual ao Quad. de toda a composta AB.*

PROPOSIÇÃO IX. *Probl.*

Fig. 9. *Dada a recta BA, cortada igualmente em O, e desigualmente em C; serão os quadrados das partes desiguaes BC, CA, duplos dos quadrados da metade BO, e da parte intermedia OC.*

DEm. O Quad. BC, he igual à { 2. RRect. BOC (4.)
Quad. BO
Quad. OC.

Logo,

Logo, accreſcentando à ambas as partes o Quad. CA, ſerão os QQuad. { BC
{ CA.
iguaes à { 2. RRect. BOC, ou AOC
{ Quad. BO
{ Quad. OC
{ Quad. CA.
Porèm os 2. rectangulos AOC, juntamente com o Quad. CA, ſão iguaes aos 2. quadrados OA, OC (7.) iſto he, pela igualdade dos lados, aos 2. quadrados BO, OC. Logo, ſubſtituindo eſtes por aquelles, ſerão os QQuad. { BC iguaes à { 2. QQuad. BO
{ CA. { 2. QQuad. OC.
iſto he, ſerão duplos de hum, e outro. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO X. *Theor.*

Se á recta EC, cortada pelo meyo em O, ſe lhe accreſcentar outra recta CB; ſerão os quadrados da compoſta EB, e da accreſcentada CB, duplos dos quadrados da metade da dada EO, e da compoſta da metade, e da accreſcentada OB. Fig. 10.

DEm. Accreſcente-ſe da outra parte AE, igual à CB. Conſta da Conſtr. que toda a AB, eſtà cortada pelo meyo em O, e não pelo meyo em C. Logo os QQuad. { AC
{ CB.
ſão iguaes à { 2. QQuad. AO (*Ant.*)
{ 2. QQuad. OC.
Porèm o Quad. AC, he igual ao Quad. EB; o Quad. AO, igual ao Quad. OB; e o Quad. OC, igual ao Quad. EO: logo, ſubſtituindo eſtes por ſeus iguaes, ſerão

ſeráõ os QQuad. { EB iguaes à { 2. QQuad. OB
{ CB { 2. QQuad. EO.

iſto he, ſeráõ duplos de hum, e outro. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XI. *Probl.*

Fig. 11. *Dada a recta CD, cortalla de tal ſorte em O, que ſeja o rectangulo CDO, comprehendido da toda, e de huma das partes OD, igual ao quadrado da outra parte CO.*

C*Onſtr.* Levante-ſe do ponto C, a perpendicular CA, igual à CD, e corte-ſe pelo meyo em L: ajuntem-ſe os pontos L,D, e tome-ſe na AC, produzida, LE igual à LD; e na dada CD, o ſegmento CO igual à CE. Digo que o ponto O, he a ſecçáõ, que ſe pede.

Dem. Forme-ſe ſobre a recta dada o Quad. CB, e ſobre o ſegmento CO, o Quad. CF; e produzida a parallela FO, o Rect. AF. Porquanto â recta AC, cortada pelo meyo em L, ſe lhe accreſcentou a recta CE, ſerà o { Rect. AEC igual ao Quad. LE, ou LD (*6.*)
{ Quad. LC,

iſto he, aos QQuad. { CD (47. 1.)
{ LC.

Logo tirando de ambas as partes o Quad. commum LC, ficarà o Rect. AEC; iſto he AF, igual ao Quad. CD, iſto he CB: logo tirando outra vez de ambas as partes o Rect. commum AO, ficarà o Rect. OB, igual ao Quad. CF; iſto he, o Rect. CDO, comprehendido da toda, e de huma das ſuas partes OD, igual ao Quad. da outra parte CO. *Q. E. &c.*

ESCHO-

ESCHOLIO.

Esta Prop. a qual verdadeiramente he admiravel, e de muito uso na Geometria, não se pòde explicar por numeros; nem inteiros, nem quebrados. Veja-se a Prop. 30. do l. 6.

PROPOSIÇÃO XII.

Em todo o triangulo FOB, o quadrado do lado FB, opposto ao angulo obtuso O, excede aos dous quadrados dos outros dous lados FO, BO, em dous rectangulos BOH, comprehendidos de qualquer dos dittos lados BO, e da recta OH, intercepta entre o ditto angulo obtuso, e a perpendicular FH, tirada do angulo opposto ao mesmo lado produzido. *O mesmo se entende, se se produzir o outro lado FO, e se tirar a perpendicular do angulo B. Fig. 12.

D*Em.* O Quad. FB, he igual aos QQuad. { FH (47. 1.) HB.

Porèm o Quad. HB, he igual ao { Quad. HO (4.) Quad. BO 2. RRect. BOH.

Logo, substituindo estes por aquelle, serà o Quad. FB, igual ao { Quad. FH; isto he, ao Quad. FO (47. 1.) Quad. HO { Quad. BO 2. RRect. BOH.

isto he, excederà aos dittos quadrados FO, BO, em 2. rectangulos BOH. *Q. E. &c.*

PROPO-

PROPOSIÇÃO XIII. *Theor.*

Fig. 13. e 14. *Em todo o triangulo BCA, o quadrado do lado BA, opposto a qualquer dos angulos agudos C, he excedido dos quadrados dos outros dous lados BC, AC, em 2. rectangulos ACO, comprehendidos de qualquer dos dittos lados AC, e da recta CO, intercepta entre o ditto angulo agudo, e a perpendicular BO, tirada do angulo opposto ao mesmo lado, produzido quando seja necessario.** Se a ditta perpendicular cahir dentro do triangulo, he CO, parte de AC; se fora, como na figura 15. he AC, parte de CO.

D*Em*. Os QQuad. { AC
CO.
são iguaes à { 2. RRect. ACO (7.)
Quad. OA.

Logo, accrescentando a ambas as partes o Quad. BO, serão os QQuad. { AC; isto he, os QQuad. { AC (47.1.)
CO
BO. } BC.

iguaes à { 2. RRect. ACO
Quad OA
Quad. BO.

isto he à { 2. RRect. ACO (47.1.)
Quad. BA.

Logo o Quad. BA he excedido dos QQuad. BC, AC, em dous rectangulos ACO. *Q.E.&c.*

COROL.

COROLLARIO.

DO meſmo modo ſe demonſtra, quando a perpendicular cahe fora do triangulo, como na Figura 15.

ESCHOLIO.

DEſtas duas Propoſições, e da 47. do l. 1. (com quem ellas tem muita connexão) ſe tira o modo de medir a area de qualquer triangulo BCA, *cujos lados ſejão conhecidos. He ſem duvida, que a ditta area ſe produz da multiplicação da baſe pela metade da altra; ou da altura pela metade da baſe, como ſe colhe facilmente da Prop. 41. do meſmo livro: donde toda a difficuldade està, em conhecer a ditta altura; iſto he, tomado por baſe do triangulo qualquer lado conhecido AC, conhecer a perpendicular BO, que cahe ſobre ella do angulo oppoſto: porèm eſta ſe conhece aſſim.* Fig. 13. 14. 15. Fig. 14.

Supponhamos, que o ditto angulo B, he agudo (o que ſe ſabe facilmente, comparando o quadrado da baſe com os dous dos lados; ſegundo o que diſſemos nas duas Propoſições antecedentes.) Tire-ſe o quadrado do lado AB, dos quadrados dos lados BC, AC; e ſerà o reſiduo igual à 2. RRectangulos ACO, (Ant.) *logo, dividindo a metade deſte reſiduo (iſto he, hum Rect. ACO) pelo lado AC, conhecido, ficarà conhecida a recta CO* (Eſcho. da 34.) *Conhecida eſta, tire-ſe o Quad CO, do Quad. BC, e ſerà o reſiduo o Quad. BO* (47. 1.) *cuja raiz he a perpendicular, que ſe buſca. Eſta, como digo, multiplicada pela metade do lado AC, ſobre quem cahe; ou todo o lado pela metade della, darà a area do triangulo ACB.* O meſmo ſe entende, quando a perdicular cahe fora do triangulo; o que ſuccede quando o quociente CO, he mayor, que o lado AC.* Fig. 15

Fig. 14. *Exemplo por numeros: seja o lado AC, de 14. palm. BC de 15. e AB de 13. e deseje-se saber de quantos palmos quadrados consta o triangulo ACB. He sem duvida, que o Quad. AC, consta de 196. palmos; BC de 225. e AB de 169. e que abatendo este ultimo dos dous primeiros, será o residuo 252. cuja metade 126. dá o Rect. ACO: porèm este numero partido por 14. dá 9. logo a recta CO, consta de 9. palmos. Abata-se agora o Quad. de 9. do Quad. de 15. isto he, 81. de 225. isto he, o Quad. CO, do Quad. BC; e será o residuo; isto he, o Quad. BO, de 144. palmos, cuja raiz 12. são os palmos da perpendicular BO. Multipliquem-se pois 6. por 14. ou 12. por 7. (isto he, a metade de BO, por AC; ou a metade de AC, por BO) e será o producto 84. o numero dos palmos quadrados, de que consta a area do triangulo ACB. &c.*

Para exercicio dos principiantes puz tambem numeros na Figura 12. dos quaes se infere, ter a perpendicular FH 12. palmos; e a area do triangulo FOB 66. quadrados.

PROPOSIÇÃO XIV. *Probl.*

Dado o rectilineo OCAD, construir hum quadrado igual a elle.

Fig. 16. 36.

COnstr. Forme-se hum rectangulo DB, igual ao rectilineo dado (45.1.) Se os 2. lados conjuntos DA, DC, forem iguaes, será o rectangulo DB, o quadrado que se pede: senão, produza-se o lado mayor BC, atè que CG, seja igual ao menor CD; e dividida a recta BG, pelo meyo em O, descreva-se o semicirculo BEG; e produza-se DC, atéque occorra â circunferencia em E. Digo que o quadrado CE, he o que se pede.

Dem. Tire-se o rayo OE. Por quanto BG, està cortada

cortada igualmente em O, e desigualmente em C, será { o Rect. BCG, igual ao Quad. OG, ou OE (5.) / Quad. OC.

isto he, aos QQuad. { CE / OC.

Logo tirando o Quad. commum OC, será o Rect. BCG; isto he, DB (*Constr.*) igual ao Quad. CE. *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

P*Ara se reduzir mais facilmente o rectilineo ao rectangulo, veja-se o Esch. da mesma* 45. *citada.*





ELEMENTOS DE GEOMETRIA.

LIVRO III.

DOS PARADOXOS, QUE OBSERvou Ariſtoteles *na geraçaõ do Circulo, tocamos alguma couſa na Definiçaõ* 18. *do l.* 1. *Dos myſterios (verdadeiramente admiraveis) que obſervou* Galileo *na ſua rotaçaõ, fallaremos mais largamente no ultimo l. da Geometria Practica. Neſte tratarey ſómente com* Euclides *das ſuas propriedades, o qual he como hum preludio da Doutrina da Esfera; como aquella, que por qualquer parte que ſe corte, toda ſe reſolve em circulos, como enſina* Theodoſio. *As ſuas propoſições mais admiraveis ſaõ as* 16. 20. 21 22. 31. 35. *e* 36. *das quaes procedem as invenções de tantos, e tão engenhoſos inſtrumentos, de que uſa a Geometria Practica, e a Aſtronomia.*

DEFINIÇÕES.

1 C*IRCULOS iguaes*: ſão os que tem os diametros, ou ſemi-diametros iguaes.

2 A re-

Fig. 15. 2 A recta AB, se diz *Tocar* o circulo DOQ: quando de tal sorte lhe occorre em D, que continuada não o corta.

Fig. 12. 13. 3 Os circulos se dizem *Tocarse*: quando occorrendo hum ao outro; ou pela parte de dentro em A, ou de fora em O, não se cortão.

Fig. 17. 4 As rectas AD,BE, se dizem *Distar igualmente do centro de qualquer circulo*: quando as perpendiculares CO,CQ, tiradas do mesmo centro, são iguaes entre si.* E aquella distarà mais, cuja perpendicular CS, for mayor.

Fig. 18.

Fig. 1. 5 *Segmento do circulo*: he a porção ADB, ou AEB, a quem corta a recta AB, a qual não passa pelo centro.* O segmento mayor he o que enserra em si o ditto centro; o menor he o que o exclue.

Fig. 1. 6 *Angulo do segmento*: he o angulo mixtilineo BAE; ou BAD, a quem comprehende a ditta recta, com qualquer das partes da circunferencia cortada.

Fig. 28. e 29. 7 *Angulo no segmento*: he o angulo ABD, a quem comprehendem duas rectas, tiradas dos extremos da secção AD, a qualquer ponto B, do arco cortado.

8 Este mesmo augulo se diz *Existir* no segmento ABD, aonde tem o vertice: *e Insistir* no segmento opposto AED, aonde estriba os lados.

Fig. 28. e 29. 9 *Sector de hum circulo*: he a porção ACD, comprehendida de dous semidiametros CA,CD, e do arco intercepto AED; ou seja mayor, ou menor que a semi-circunferencia, com tanto, que não seja igual.

10 *Segmentos semelhantes*: são os que comprehendem, ou sobre que insistem angulos iguaes.

PROPOSIÇÃO I. *Probl.*

Dado hum circulo, achar-lhe o centro.

Fig. 1. **C***Onstr*. Tire-se dentro do circulo dado qualquer recta AB, e corte-se pelo meyo em O, (10.1.) tire-

tire-se pelo ponto O, a perpendicular ED (11.1.) e corte-se pelo meyo em C. Digo que este he o centro, que se busca.

Dem. Se o ditto centro està em ED, claro està que não pòde ser outro, que o ponto C: se està fora, v.g. em Q, tirem-se as rectas QA,QO,QB. Os triangulos QAO,QBO, tem todos os lados respectivamente iguaes [por quanto QA,QB, são rayos do mesmo circulo; AO,BO, são iguaes pela construcção; e QO, he comum] logo os angulos QOA,QOB, oppostos a iguaes lados, são iguaes (8.1.) e por consequencia rectos (*Def.* 14.1.) Porèm tambem são rectos os angulos EOA,EOB (*Constr.*) logo huns rectos são mayores que outros, contra o Ax. 10.

ESCHOLIO.

Facilmente se acha o centro de hum circulo com buma esquadra, se se applica o vertice desta a qualquer ponto da circunferencia F, e se notão os pontos D E, em que os lados a cortão: porquanto, tirada a recta DE, e cortada pelo meyo em C; serà este o centro, que se busca. Fig. 2.

A Dem. constarà a baxo da Prop. 31.

PROPOSIÇÃO II. *Theor.*

Se na circunferencia de hum circulo se tomarem dous pontos A,B, e se tirar huma recta de hum ao outro; toda esta cabirà dentro do ditto circulo. Fig. 3.

DEm. Consta manifestamente da Def. da linha recta, segundo *Arquimedes*: porèm pode-se demonstrar assim. Tome-se na recta AB, qualquer ponto O,

to O, e tirem-se do centro as rectas CA, CO, CB. Porquanto as rectas CA, CB, são rayos do mesmo circulo, serão iguaes os angulos A, B (5. 1.) porèm o angulo externo COB, he mayor que o interno A (*Cor.* 1. *da* 32. 1.) logo tambem he mayor que B: logo no triangulo Z, o lado CB, opposto ao mayor angulo, he mayor que OC, opposto ao menor (19. 1.) Porèm BC, chega desde o centro precisamente atè a circunferencia: logo CO, ficarà assima; e por consequencia todos os pontos da recta AB, cahem dentro do circulo. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO III. *Theor.*

Fig. 3. *Se dentro de hum circulo qualquer recta DE, que passe pelo centro, cortar pelo meyo outra recta AB, que não passe por elle; farà com ella angulos rectos. E se os fizer, a cortarà pelo meyo.*

DEm. 1. part. Tirem-se do centro C, os rayos CA, CB. Os triangulos X, Z, tem todos os lados respectivamente iguaes, como he manifesto; logo os angulos em O, oppostos a iguaes lados, são iguaes (8. 1.) e por consequencia rectos (*Def.* 14. 1.) *Q. E &c.*

2. Part. Os triangulos X, Z, são rectangulos em O (*Hyp.*) logo o Quad. CA, he igual aos QQuad. { CO / AO.

e o Quad. CB, aos QQuad. { CO / OB. (47. 1.)

Porèm o Quad. CA, he igual ao Quad. CB, pela igualdade dos rayos: logo as duas summas são entre si iguaes; e por consequencia, tirado o Quad. commum CO, os remanentes AO, OB, serão iguaes. *Q. E. &c.*

PROPO-

PROPOSIÇÃO IV. *Theor.*

Se dentro de hum circulo se cortarem duas rectas AB, ED; não se cortarão mutuamente pelo meyo, senão no cazo, em que passem ambas pelo centro. Fig. 3. 4.

DEm. Se huma ED, passar pelo centro, e a outra AB, não; claro està que a segunda não pòde cortar pelo meyo a primeira. E se nem huma, nem outra passar pelo centro, tire-se delle à secção commua a recta CO: logo (*pela Ant.*) ambos os angulos COD, COB, são rectos; e por consequencia a parte he igual ao todo: o que he absurdo, &c. Fig. 3. Fig. 4.

PROPOSIÇÃO V. e VI. *Theor.*

Os circulos que se cortão, ou tocão pela parte de dentro, não pòdem ter o mesmo centro. Fig. 6. 7.

DEm. Seja, se for possivel, o ponto C, centro cõmum de ambos: logo tirado hum rayo CX, ou â secção, ou ao contacto X, e outro CZ, a qualquer differente ponto; serão as rectas CO, CZ, ambas iguaes à mesma CX, por serem rayos de hum mesmo circulo: logo serão iguaes entre si; isto he, a parte ao todo: o que he absurdo.

PROPOSIÇÃO VII. *Theor.*

Se dentro de hum circulo se tomar qualquer
Fig. 8. *ponto O, diverso do centro, do qual se tirem quaesquer rectas OE, OQ, OB, â circunferencia; serà* 1. *a mayor de todas a que passar pelo centro OB:* 2. *a menor, a que com ella integra o diametro OG:* 3. *a mayor das intermedias, a que estiver mais perto do ditto diametro; isto he, serà OQ, mayor que OE:* 4. *e daquelle ponto não se poderão tirar mais que duas rectas iguaes.*

D*Em.* 1. part. Compare-se OB, com OQ, e tire-se o rayo CQ. Porquanto CQ, CB, são iguaes, acrescentada a commua OC, serão as duas OC, CQ, iguaes a OB: porèm OC, CQ, são mayores que OQ (20. 1.) logo tambem OB. O mesmo se entende de qualquer outra: logo &c.

2. Part. Compare-se OG, com OE, e tire-se o rayo CE. Por quanto CE, CG, são iguaes; e CE, he menor que as 2. juntas CO, OE (20. 1.) tambem CG, serà menor que ellas: logo tirada a parte commua CO, ficarà OG, menor que OE. &c.

3. Part. Nos triangulos OCQ, OCE, os lados OC, CQ, são iguaes respectivamente aos lados OC, CE: porèm o angulo comprehendido dos primeiros, he mayor que o comprehendido dos segundos: logo tambem a base OQ, he mayor que a base OE (24. 1.) O mesmo se entende das de mais. &c.

4. Part. Consta da ant. porquanto, se se podessem tirar tres iguaes OE, OA, OD, ficarião duas iguaes para a mesma parte, contra o demonstrado na 3. part.

PRO-

PROPOSIÇÃO VIII. *Theor.*

Se de qualquer ponto B, tomado fora de hum circulo, se tirarem quaesquer rectas à circunferencia BO, BQ, BE, &c. Serà 1. a mayor de todas a que passar pelo centro BO, e terminar no concavo da ditta circunferencia. 2. Das outras serà sempre a mayor a que estiver mais perto desta. 3. Fora do circulo serà a menor a que terminar no convexo, e produzida passar pelo centro. 4. E das outras, que terminarem no mesmo convexo, serà sempre a menor a que estiver mais perto desta. 5. Finalmente do ditto ponto não se poderão tirar mais que duas rectas iguaes, ou terminem no concavo, ou no convexo. Fig. 9. Fig. 10.

D*Em* 1. part. Tire-se do centro C (*Fig.* 9) a recta CQ. Porquanto CQ, CO, são iguaes; accrescentada a commum BC, serão as duas BC, CQ, iguaes a BO: porèm BC, CQ, são mayores que BQ (20. 1.) logo tambem BO, &c.

2. Part. Tire-se do mesmo centro a recta CE. Os lados BC, CQ, são iguaes respectivamente aos lados BC, CE: porèm o angulo comprehendido dos primeiros he mayor que o angulo comprehendido dos segundos: logo tambem a base BQ, he mayor que a base BE (24. 1.) &c.

3. Part. Tire-se a recta CQ (*Fig.* 10.) os dous lados BQ, QC, são mayores que o terceiro BC (20. 1.) porèm QC, OC, são iguaes: logo tirando estes daquelles, ficarà BO, menor que BQ, &c.

4. Part. Tire-se as recta BE, e o rayo EC. Os dous lados BQ, QC, são menores que os outros dous BE,

EC (21. 1.) porèm os dous QC,EC, ſão iguaes: logo tirando eſtes da quelles, ficarà BQ, menor que BE, &c.

A 5. part. conſta claramente da antecedente.

PROPOSIÇÃO IX. *Theor.*

Fig. 8. *Se de hum ponto C, dentro de hum circulo, ſe tirarem mais que duas rectas iguaes à circunferencia; o ditto ponto ſerà o centro.*

DEm. Conſta da 4. part. da Prop. 7.

PROPOSIÇÃO X. *Theor.*

Fig. 11. *Hum circulo não pòde cortar a outro, mais que em dous pontos.*

DEm. Corte-o, ſe for poſſivel, em tres E,B,A. He ſem duvida, que os dittos pontos ſão communs à ambas as circunferencias: logo ſe do centro C, de qualquer circulo, ſe tirarem tres rayos aos dittos tres pontos, darſehão tres rectas iguaes, tiradas de hum meſmo ponto à circunferencia do outro circulo: logo (*pela Ant.*) ſerà tambem centro delle, contra o demonſtrado na Prop. 5.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XI. *Theor.*

Se dous circulos ſe tocarem pela parte de dentro; a recta, que paſſar por ambos os centros C,E, paſſará tambem pelo contacto A. Fig. 12.

DEm. Se não paſſa: ſejão os centros C,V (o primeiro mayor, e o ſegundo do menor circulo) e corte a recta CV, à ambos os circulos nos pontos O,L. Tirem-ſe de ambos os centros a hum meſmo ponto do contacto os rayos CA,VA. As rectas VA, VO, ſão iguaes entre ſi, por ſerem rayos do meſmo circulo: logo accreſcentada a commua CV, ſerão CV, VA, iguaes a CO, e menores que COL: porèm CA, tambem he menor, que CV,VA (20.1.) logo ſerà muito menor que COL; contra a Def. do circulo, &c.

PROPOSIÇÃO XII. *Theor.*

Se dous circulos ſe tocarem pela parte de fora; a recta que paſſar por ambos os centros G,C, paſſarà tambem pelo contacto O. Fig. 13.

DEm. Senão paſſa: ſejão os centros A,B; e corte a recta AB, os dous circulos, deixando entre hum, e outro a parte Q. Tirem-ſe de ambos os centros a hum meſmo ponto do contacto os rayos AO, BO. Eſtas duas rectas juntas ſão mayores, que AB (20.1.) porèm, por ſer AO, igual a AQ; e BO, igual a BQ, devião ſer iguaes; e ainda menores, ſendo Q, alguma parte: logo, ſerião mayores, e menores a reſpeito do meſmo: o que he abſurdo.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XIII. *Theor.*

Os circulos que se tocão, ou seja pela parte de dentro, ou pela de fora, tocão-se sómente em hum ponto. E em hum só ponto se toca tambem hum circulo com huma recta.

Fig. 14. DEm. 1. part. Supponhamos 1. que se tocão pela parte de dentro por todo o arco LA. Tire-se huma recta pelos dous centros C,E, atè o contacto A (11.) e tirem-se outras duas dos mesmos centros, a outro qualquer ponto L, do mesmo contacto. As rectas EL,EA, são iguaes entre si: logo accrescentada a commua CE, serão as duas CE,EL, iguaes a CA: porèm estas mesmas são mayores que CL (20. 1.) logo tambem o serà CA; contra a Def. do circulo.

Fig. 15. Supponhamos 2. que se tocão pela parte de fora em todo o arco QO. Tire-se huma recta pelos dous centros C,G, a qual passe pelo contacto O (12.) e tirem-se outras duas dos mesmos centros a outro qualquer ponto Q, do mesmo contacto. As rectas CQ, GQ, são mayores que CG (20.1.) porèm se o ponto Q, fosse commum a ambas as circunferencias, houverão de ser iguaes: logo &c.

Fig. 15. 2. Part. Toque o circulo DOQ, se for possivel, a recta AB, em toda a parte HL. Tirem-se do centro C, a quaesquer dous pontos H,L, do ditto contacto duas rectas: serà o triangulo HCL, isósceles: logo os angulos sobre a base LHC,HLC, serão agudos (*Cor.* 11. *da* 32. 1.) logo tirada do mesmo centro a perpendicular CD, cahirà esta dentro do mesmo triangulo (*Cor.* 3. *da mesma*) logo o lado CL, opposto ao mayor angulo, serà igual ao lado CD, opposto ao menor; contra o demonstrado na 19. do 1.

CORO-

COROLLARIO.

OS circulos, que tem differentes centros em huma mesma recta; e a cortão em hum mesmo ponto O; todos se tocão no mesmo ponto. Fig. 16.

PROPOSIÇÃO XIV. *Theor.*

Dentro de hum circulo as rectas iguaes AD, BE, distão igualmente do centro. E as que distão igualmente do centro, são iguaes. Fig. 17.

DEm. 1. part. Tirem-se do centro C, as rectas CO, CQ, perpendiculares âs rectas dadas, e tirem-se os rayos CA, CB. Nos triangulos rectangulos COA, CQB, os lados oppostos aos angulos rectos CA, CB, são iguaes; como tambem os lados OA, QB. (3. *deste, e Ax.* 6. 1.) logo os seus quadrados são respectivamente iguaes. Porém o quadrado CA, he igual aos QQuad. OA, CO; e o Quad. CB, aos QQuad. QB, CQ (47. 1.) logo, tirando de iguaes summas os QQuad. iguaes OA, QB, ficarão iguaes os outros QQuad. CO, CQ; e por consequencia serão iguaes as distancias das rectas dadas. *Q. E. &c.*

2 Part. Demonstra-se quasi do mesmo modo.

PROPOSIÇÃO XV.

De todas as rectas, que se tirão dentro de hum circulo, a mayor he o diametro: e das outras a mayor, he a que está mais perto do centro. Fig. 18.

DEm. 1. part. Seja qualquer recta BE, distinta do diametro; e tirem-se os rayos CB, CE: estes juntos

juntos são iguaes ao diametro, e mayores que BE (20.1.) logo, &c.

2. Part. Seja AD, mais proxima ao centro que PQ; isto he, tiradas do centro as perpendiculares CV, CS, seja a primeira menor que a segunda (*Def*.4.) Digo que AD, he mayor que PQ. Tome-se CO, igual a CV; e tire-se pelo ponto O, a perpendicular BE: serà esta igual a AD (*Ant*.) porèm BE, he mayor que PQ; por serem os lados BC, EC, iguaes aos lados PC, QC, e o angulo comprehendido dos primeiros, mayor que o angulo comprehendido dos segundos (24.1.) logo tambem AD, he mayor que PQ. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XVI. *Probl.*

Fig. 19. *Se pelo extremo E, do diametro de qualquer circulo, se tirar huma perpendicular DB; cabirâ esta toda fora do ditto circulo. E do mesmo extremo não se poderà tirar outra recta EA, entre a perpendicular, e a circunferencia, sem que corte o mesmo circulo.*

D*Em*. 1. part. Tome-se na recta DB, qualquer ponto L, diverso de E; e tire-se do centro C, a recta CL. Porquanto o triangulo ECL, he rectangulo em E (*Hyp*.) serà o angulo L, agudo (*Cor*. 5. *da* 32.1.) logo CL, opposta ao mayor angulo, he mayor que CE, opposta ao menor (19.1.) porèm a menor CE, chega desde o centro atè à circunferencia: logo a mayor CL, deve passar a diante; e por consequencia o ponto L, cahe fora do circulo. O mesmo se entende de outro qualquer ponto: logo, &c.

2 Part. Tire-se, se for possivel, entre a perpendicular, e a circunferencia a recta EA, a qual não corte o circulo. Porquanto o angulo CEA, he menor que recto, se do centro C, se tirar huma perpendicular

cular a EA, cahirà esta para a parte do ditto angulo (*Cor.* 3. *da* 32. 1.) e pela supposição despois de cortar a circunferencia em Q, occorrerá â ditta recta em O. Agora: no triangulo COE, rectangulo em O, o lado CE, opposto ao mayor angulo, he mayor que CO, opposto ao menor (19. 1.) porèm o mesmo CE, por ser igual à CQ, he menor que CO: logo he mayor e menor a respeito do mesmo: o que he absurdo.

COROLLARIOS.

1 DO mesmo modo, que se demonstra a segunda parte, se pode tambem demonstrar a primeira.

2 Se continuado o diametro OG, se tomarem nelle quaesquer pontos, dos quaes se descrevão outros tantos circulos, todos concorrentes no ponto O; serà este o contacto commum de todos. E, Fig. 16.

3 Por mais, e mais que se avisinhem huns aos outros, e à perpendicular EB, nunca jà mais concorrerão entre si, nem com ella, senão na quelle indivisivel ponto.

4 Daqui se segue, que qualquer recta se póde dividir infinitamente em partes menores, e menores; sem que jà mais se chegue â minima.

Dem. Tire-se de qualquer ponto C, do ditto diametro a recta CB, atè â perpendicular EB. Consta do demonstrado, que todos os circulos assim descriptos, e outros infinitos, todos cortão aquella recta; sem que jà mais se encontre hum com outro, senão no ponto O (13.) logo cada hum determinarà na ditta recta differente parte, sem que jà mais se chegue â ultima.

5 Nenhuma recta pode dividir o angulo do contacto (ou da contingencia) LEQ. A razão he, porque para isso devia mediar a ditta recta entre o lado recto,

e curvo do ditto angulo; contra o demonſtrado n. 2. parte.

6. Pode-ſe porèm dividir o ditto angulo com muitas, e muitas circunferencias, as quaes deſcriptas de differentes pontos do ditto diametro OG, paſſem todas pelo ponto O.

Fig. 19. * 7. O angulo do contacto LEQ, he menor que qualquer agudo rectilineo LEO, por minimo que ſeja; porquanto por mais, e mais que ſe ajuntem os lados do ditto angulo, ſempre o arco do do contacto ha-de cahir dentro delles.

* 8. O angulo do ſemi-circulo CEQ, ainda que não he recto, he mayor que qualquer agudo CEO, por mayor que ſeja; porquanto por mais, e mais que ſe alargem os lados do ditto angulo agudo, ſempre o arco do do ſemi-circulo ha de cahir fora delles

* O angulo recto CEL, comprehende infinitos angulos do contacto QEL; e por conſequencia he infinitamente mayor que elle. A razão he, porque o angulo recto pode-ſe dividir em infinitos agudos; e cada agudo, por minimo que ſeja, ſempre he mayor que o do contacto.

* 10. O angulo do contacto QEL, he parte do recto CEL; e com tudo, por mais, e mais que ſe multiplique, nunca o pode igualar: de que ſe infere que infinitas partes juntas não compoem hum infinito.

* 11. Pode-ſe paſſar de menor a mayor, procedendo continuadamente de mais em mais, ſem ſe paſſar pelo igual. Porquanto ſe a recta EC, ſe mover circularmente ſobre o ponto E, até coincidir com a perpendicular EL, hirà formando infinitos angulos agudos CEO, ſempre mayores, e mayores, porèm nunca formarà hum igual ao angulo do ſemi-circulo CEQ.

ESCHO-

ESCHOLIO.

OS Corollarios 7. e 8. duvidão muitos que sejão de Euclides ; *naõ obstante o acharem-se no texto. E na verdade* Apollonio , *insigne , e exactissimo Geometra , demonstrando da* Ellipse , *da* Hyperbola , *e da* Parabola *semelhantes propriedades , ás que demonstra* Euclides *do Circulo , jà mais fez mençaõ de taes sequelas. Os corollarios seguintes* 9. 10. *e* 11. *saõ certamente suppostos , e reputados cõmummente por paradoxos.*

Explica-se a natureza do angulo do contacto.

A celebre controversia , que houve antigamente entre Peletario, *e* Clavio , *sobre o angulo do contacto , deo tal brado nas Escholas, que obrigou a muitos e muy insignes Geometras, a sahir à luz com varios discursos, entre os quaes merecem particular attençaõ os de* Galileo , *e* Wallis , *Professores de grande nome. E aindaque naõ he do meu assumpto controverter aqui este ponto ; todavia por naõ deyxar de dizer alguma couza em huma questaõ tam celebre , e que tem tanta connexão com os Elementos , porey aqui esta breve nota.*

O ponto principal da ditta controversia foy; se o angulo do contracto QEL, era parte do angulo recto CEL? E se os dittos angulos erão Quantidade, ou naõ? Para que melhor se perceba a solução destas duvidas; e se desatem os paradoxos dos 5. *ultimos corollarios : Supponho* Fig. 16.

1 *Que aindaque a Quantidade não se pode conceber sem Figura ; e muito menos a Figura sem Quantidade; todavia, segundo a nossa consideraçaõ, a Quantidade e a Figura são cousas diversas, e tem muy differentes propriedades; porquanto da Quantidade se diz propriamente* Ser igual, ou desigual; *e da Figura* Ser semelhante, ou dessemelhante. *Daqui nasce, que comparadas duas Quantidades entre si , podem ser iguaes na grandeza, e*

dessemelhantes na figura, como consta das Proposições 35. 36. 37. e 38. do l. 1. e pelo contrario, podem ser semelhantes na figura, e desiguaes na grandeza, como se vê nos circulos, nos triangulos equilateros, nos quadrados, &c.

2 *Que aindaque o angulo seja parte da Figura; e propriamente fallando hum Modo, ou Modificação da Quantidade; todavia, como he inseparavel, e ainda inintelligivel sem Quantidade, toma della por analogia aquella mesma propriedade, de* Ser igual, ou desigual, *que só a ella propriamente compete. E assim se diz dos angulos:* Ser hum mayor que outro: Ser hum parte de outro: Dividirse: Comporse; Diminuirse; Augmentarse *&c. como se lê frequentemente em todo o l. 1. Porèm como esta propriedade não he propria do angulo; senão, como disse, analoga, e accõmodaticia; não se verificão della todos aquelles Axiomas, que competem â rigorosa igualdade; e os primeiros que faltão, são os mais evidentes.*
Fig. 22. *Porquanto o angulo curvilineo Ao. não he igual, nem semelhante ao rectilineo oE; sendo assim que os angulos dos semi-circulos A, E, são iguaes; o angulo o. commum; e segundo o Ax. 2. accrescentando o commum à iguaes, os compostos devião de ser iguaes. Item: o angulo rectilineo ACB, não he igual ao curvilneo DCE; sendo*
Fig. 23. *assim, que tirados iguaes de iguaes (isto he, BCD de*
23. *ACE) os residuos devião de ser iguaes Ax. 3.*

3 *Que o angulo rectilineo he totalmente incõmensuravel, e incomparavel com o curvilineo: o que demon-*
Fig. 21. *stro com hum exemplo, que pode servir de regra. Sejão no semi-circulo VAV, dous angulos; hum rectilineo VAZ, e outro mixtilineo VOEAZ. He sem duvida, que o angulo rectilineo consta de huma só inclinação; isto he, que todos os pontos, e partes do lado VA, segundo a direcção daquella linha, vão buscar constantemente o ponto A: e que o mixtilineo consta de differentes inclinações; porquanto, dividido o quadrante VA, em tres*

partes

partes, e tiradas pellos pontos das divisões tres rectas *VO, OE, EA*; cada huma destas vay buscar no outro lado *AZ*, seu ponto differente; de tal sorte, que todo aquelle quadrante (repetida a divisão infinitamente) não he outra couza mais que huma continuada variedade de inclinações; que começa desde a perpendicular atè acabar na parallela. Logo os dittos angulos saõ totalmente incomparaveis; por ser hum constante, e outro vago. Daqui se segue, que comparado o angulo do contacto com qualquer agudo, nem he propriamente menor, nem mayor, nem igual: porquanto, como o lado curvo comprehende todas as inclinações; segundo huma serà mayor, segundo outra menor, e segundo outra igual: ou por melhor dizer, não serà nada; porque nunca chegarà a ter dous pontos fixos, que formem huma determinada inclinação.

Suppostos estes tres principios, não serà difficil responder ás duas duvidas assima; nem desatar os paradoxos dos 5. ultimos corollarios: porquanto á primeira duvida se responde, que hum angulo sómente por analogia he parte de outro; porém o do contacto nem ainda por analogia o pode ser do recto; pois aindaque occupe parte do seu espaço, não diz ordem alguma á sua inclinaçaõ; por ser aquella constante, e esta vaga. A 2. fica jà respondido na supposição 2.

Quanto aos 5. corollarios se responde, que os dous primeiros ou não são de Euclides; ou, se o são, fallou o Geometra metaforicamente, e no sentido da Prop. 16. nos outros 3. se muda a supposição, confundindo-se a semelhança com a igualdade. Porèm respondendo mais particularmente a cada hum: Digo que

Ao 7. Nego, que o angulo do contacto seja mayor, ou menor que o agudo, ainda metaforicamente; porque para o ser, devia o arco *EQ*, cahir dentro, ou fora da recta *EO*; o que he impossivel, porque necessariamente hade cahir dentro, e fora, segundo diversas partes. Fig. 13.

Ao

Ao 8. *Nego do meſmo modo a ſuppoſição.*

Ao 9. *Nego que o angulo recto contenha propriamente infinitos angulos agudos; pois ſómente os contêm em Potencia; ou como dizem os Filoſofos* Syncathegorematicè. *Porèm dado que os contiveſſe, não haveria repugnancia, em que o angulo recto, collecção potencial de infinitos angulos agudos, excedeſſe outra infinidade de angulos do contacto, huma vez que conſtaſſe, que eſtes erão partes daquelles; o que he falſo.*

Ao 10. *Nego que o angulo do contacto, como tambem o do ſemi-circulo, ſejão partes do recto: ſão partes ſim do ſeu eſpaço, porèm não da ſua inclinação: e dado que o foſſem, ſão partes potenciaes, communicantes, e eſſencialmente* Etherogeneas; *as quaes ſó compœm o todo daquelle modo, que elle nellas ſe reſolve.*

Ao 11. *Conſta do ditto o que ſe deve reſponder.*

PROPOSIÇÃO XVII. *Probl.*

Fig. 20. *Dado fora de qualquer circulo CQO, hum ponto A, tirar delle huma Tangente ao ditto circulo.** Tangente ſe diz a recta que toca o circulo.

COnſtr. Tire-ſe do ponto dado ao centro do circulo a recta AC; e do ponto Q, em que eſta corta a circunferencia, levante-ſe huma perpendicular infinita QB. Deſcreva-ſe do meſmo centro, com o intervallo CA, outro circulo, o qual corte a ditta perpendicular em B; e tire-ſe tambem a recta BC. Do ponto O, em que eſta corta a meſma circunferencia, tire-ſe ao ponto dado a recta OA. Digo que eſta he a Tangente que ſe pede.

Dem. Os lados AC, OC, ſão iguaes reſpectivamente aos lados BC, QC; e o angulo comprehendido dos

dos primeiros, o mesmo que o dos segundos: logo os angulos AOC, BQC, oppostos a iguaes lados, são iguaes (4. 1.) porêm este he recto (*Constr.*) logo tambem aquelle; e por consequencia AO, he tangente do circulo (*Ant.*) *Q.E. &c.*

ESCHOLIO.

OUtro modo mais expedito, de tirar de hum ponto dado V, huma Tangente a qualquer circulo, se colhe da 31. deste, que he o seguinte. Tire-se do ponto dado, ao centro do circulo, a recta VC, e descreva-se sobre ella hum semi-circulo, o qual corte a circumferencia em O. Digo que a recta VO, he a Tangente, que se pede. Veja-se a ditta Prop.* Fig. 25.

PROPOSIÇÃO XVIII. *Theor.*

Se a recta QB, tocar hum circulo no ponto A, serà a recta CA, tirada do centro ao ditto ponto, perpendicular à ditta Tangente.

D*Em.* Se o não he: seja perpendicular outra qualquer recta CB, tirada do mesmo centro. Cortarà esta em qualquer ponto O, a circunferencia do circulo (16.) logo como o angulo CBA, he recto, e CAB, agudo (*Cor.* 5. *da* 32. 1.) serà CA, ou CO, mayor que CB (19. 1.) o que he absurdo. Fig. 26.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XIX. *Theor.*

Fig. 26. *Se a recta QB, tocar hum circulo, e do ponto do contacto A, se tirar para dentro delle a perpendicular AC; passarà esta pelo centro do dito circulo.*

DEm. Senão: seja X o centro, e tire-se do contacto a recta AX. Pela Ant. o angulo QAX, he recto; e pela hypothese o he tambem QAC: logo dâse hum angulo recto mayor que outro, contra o Ax. 10.

PROPOSIÇÃO XX. *Theor.*

Fig. 27. 28. e 29. *O angulo no centro ACD, he duplo do angulo na circunferencia ABD, insistentes no mesmo arco.*

Fig. 27. DEm. Tres cazos admitte esta Proposição 1. quando o lado AC, cahe sobre o lado AB: e neste, como o angulo externo ACD, he igual aos dous internos oppostos CBD, CDB (32. 1.) e estes pela igualdade dos lados oppostos, iguaes entre si (5. 1.) segue-se que he duplo de cada hum.

Fig. 28. 2 Quando ambos os lados AC, DC, cahem dentro dos outros dous AB, DB: e neste, tirada a recta BCE, do angulo da circunferencia pelo centro, serà pelo 1. cazo o angulo ECD, duplo de EBD; e o angulo ECA, duplo de EBA: logo ajuntando as partes, serà o total ACD, duplo do total ABD. *Q. E. &c.*

Fig. 29. 3 Quando hum lado AB, corta o outro DC: e neste, tirada tambem pelo centro, a recta BCE, serà o angulo total ECD, duplo do total EBD; e o parcial

cial ECA, duplo do parcial EBA: logo tirando cada parte do ſeo todo, ſerà o remanente ACD, duplo do outro remanente ABD. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXI. *Theor.*

Os angulos DAE, DBE, inſiſtentes no meſmo arco DE, ou exiſtentes no meſmo ſegmento DABE (tudo vèm a ſer o meſmo Def. 8. *) ſaõ iguaes.* Fig. 30.

DEm. Dous cazos admitte eſta Propoſição: 1. quando o arco, em que inſiſtem os angulos, he menor que o ſemi-circulo: e neſte, tirados do centro os rayos CD, CE, qualquer dos angulos A, B, he metade do angulo C *(Ant.)* logo ſaõ iguaes entre ſi (*Ax. 6.*) 2. Quando o ditto arco he igual, ou mayor que o ſemi-circulo (*Fig.* 31.) e neſte, tire-ſe a recta BA, pelos vertices. Nos triangulos X, Z, os angulos em O, ſão iguaes (15. 1.) como tambem os angulos D, E, inſiſtentes no meſmo arco BA (1. *cazo.*) logo os remanentes B, A, tambem ſerão iguaes (*Cor. 9. da* 32. 1.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XXII. *Theor.*

Os dous angulos oppoſtos de qualquer quadrilatero ABCD, inſcripto em hum circulo, ſão iguaes a dous rectos. Fig. 32.

DEm. Tirem-ſe dos angulos oppoſtos as diagonaes AC, BD. No triangulo BCD, o angulo C, juntamente com os angulos *e. o.* ſão iguaes a dous rectos (32.1.) porèm os angulos *e. e.* ſão iguaes entre ſi; co-

mo tambem os angulos *o.o.* (*Ant.*) logo o meſmo angulo C, juntamente com os dous angulos *o.e.* oppoſtos; iſto he, com todo o angulo A, ſao iguaes a dous rectos. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXIII. e XXIV.

São eſcuſadas.

PROPOSIÇÃO XXV. *Probl.*

Fig. 11. *Dado hum arco EOF, acabar o circulo.*

C*Onſtr.* Tirem-ſe como quer as rectas EO,OF; e cortem-ſe pelo meyo com as perpendiculares AC,DC (10. 1.) Digo que o ponto C, em que eſtas concorrem, ſerà o centro do circulo, de que o arco dado he parte.

Dem. O ditto centro eſtà na recta AC, e na recta DC (como ſe infere da 1.) logo não pode deixar de eſtar no ponto commum à ambas. *Q.E.&c.*

* Praxe: Tome-ſe no arco dado qualquer ponto O, e deſcreva-ſe deſte hum circulo, o qual corte o ditto arco em quaeſquer 2. pontos E,F. Deſcrevão-ſe deſtes pontos dous arcos, os quaes cortem o ditto circulo em dous pontos cada hum; e tirem-ſe pelas 4. ſecções as duas rectas AC,DC: ſerá o ponto C, em que eſtas ſe cortão, o centro do arco &c.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XXVI. e XXVII. *Theor.*

Em circulos iguaes as rectas iguaes AD, AD, determinão arcos iguaes. E se os arcos forem iguaes, as rectas serão iguaes * As dittas rectas se chamão *Cordas*, ou *Subtensas*. Fig. 28. e 29.

DEm. 1. part. Tirados dos centros dos circulos os rayos CA,CD: CA,CD, os dous triangulos ACD, ACD, tem os lados respectivamente iguaes (*Hyp.*) e por consequencia tambem os angulos (8. 1.) logo posto hum sobre outro, se a justarão perfeitamente entre si: e por consequencia ajustadas as bases AD,AD, se ajustarão tambem os arcos, pela igualdade dos circulos. *Q. E &c.*

2. Part. Porquanto os arcos AD,AD, se suppoem iguaes; posto hum sobre o outro se ajustarão entre si: logo tambem as cordas (*Ax.* 13.) &c.

PROPOSIÇÃO XXVIII. e XXIX. *Theor.*

Se em circulos iguaes os angulos nos centros ACD, ACD; ou nas circunferencias ABD, ABD, forem iguaes; tambem os arcos, em que insistem AD, AD, serão iguaes. E se estes forem iguaes, tambem o serão aquelles. Fig. 28. e 29.

DEm. 1. part. Porquanto os angulos em C,C, são iguaes; como tambem os lados, que os comprehendem (*Hyp.*) tambem as bases AD,AD, se-

são iguaes (4.1.) logo tambem os arcos que determinão &c. (*Ant.*) Da mesma sorte: porquanto os angulos em B,B, são iguaes; tambem o serão os seus duplos em C,C (20.) logo pelo mesmo discurso, serão iguaes os arcos &c.

2. Part. Da igualdade dos arcos se infere a igualdade das cordas AD,AD (*Ant.*) porèm da igualdade dos circulos se infere tambem a igualdade dos rayos CA, CD: CA,CD: logo os dous triangulos ACD,ACD, são totalmente iguaes (8.1.) e por consequencia os angulos em C,C: e suas metades em B,B; &c.

PROPOSIÇÃO XXX. *Probl.*

Fig. 34. *Dado hum arco AB, cortallo pelo meyo.*

COnstr. Tire-se a corda AB, e corte-se pelo meyo em O (10.1.) Digo que a perpendicular EF, a qual occorre ao arco dado em C, o dividirà pelo meyo.

Dem. Tirem-se as rectas AC,BC. Os triangulos AOC,BOC, tem dous lados respectivamente iguaes (*Constr.*) e rectos os angulos comprehendidos, indicados pelas mesmas letras: logo tambem as bases AC, BC, serão entre si iguaes (4.1.) e por consequencia os arcos que determinão (26.) *Q.E. &c.*

* Praxe: Descrevão-se, com qualquer intervallo, dos extremos do arco dado dous circulos, os quaes se cortem nos pontos E,F; e ajuntem-se estes com huma recta: dividirà esta o ditto arco pelo meyo.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XXXI. *Theor.*

O angulo no ſemicirculo BAD, he recto: no mayor ſegmento BAE, he agudo: e no menor BAO, he obtuſo. Fig. 35. e 36.

DEm. 1. part. Tire-ſe o rayo CA. Porquanto os lados CB, CA, ſão iguaes, tambem ſerão iguaes os angulos oppoſtos BAC, ABC (5.1.) e pela meſma razão os angulos DAC, ADC: logo todo o angulo A, he igual aos outros dous angulos B, D; e por conſequencia o ditto angulo A, he recto (*Cor.* 7. *da* 32.1.) *Q.E.&c.*

2. e 3. Part. Tire-ſe do ponto B, o diametro BD; e do ponto A, a recta AD. O angulo BAD, he recto (1. *part.*) logo o angulo BAE, parte ſua, he agudo; e o angulo BAO, de quem o recto he parte, obtuſo (*Def.* 15. *e* 16. *do* 1.) *Q.E.&c.* Fig. 36.

PROPOSIÇÃO XXXII.

Se huma recta ED, tocar hum circulo, e do ponto do contacto A, ſe tirar outra recta, AC, que o corte; ſerà o angulo da Tangente e da Secante BAC, igual ao angulo exiſtente no ſegmento alterno AOC. * Secante ſe diz a recta, que corta o circulo. Fig. 38. e 37.

DEm. Primeiramente ſe a Secante paſſar pelo centro (*Fig.* 37.) a razão he clara: porquanto o angulo DAC, he recto (18.) como tambem o angulo no ſemi-circulo AOC (*Ant.*) logo &c. Senão paſſar (*Fig.* 38.) tire-ſe pelo centro a recta AE; e ajuntem-ſe os pontos C, E. Porquanto o angulo no ſemi-circulo ACE, he recto, ſerão os deus juntos AEC, CAE,

outro

outro recto (*Cor.*5. *da* 32. 1.) porèm BAE, tambem he recto (18.) logo tirado o commum CAE, os remanentes BAC, AEC, ferão iguaes; isto he, BAC, AOC (21.) *Q.E.&c.*

Da mesma maneira se demonstra serem iguaes os obtusos DAC, AGC. Porquanto DAC, BAC, são iguaes a dous rectos (13.1.) porèm no quadrilatero CGAO, os oppostos G, O, tambem são iguaes a dous rectos (22.) logo tirando de ambas as partes os iguaes BAC, AOC, os remanentes serão iguaes. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXXIII. *Probl.*

Fig. 37. *Sobre a recta AO, descrever hum arco capaz de qualquer angulo dado BAO.*

Constr. Se o angulo dado for agudo; tire-se do vertice A, huma perpendicular ao outro lado AB; e forme-se no ponto O, outro angulo AOQ, igual ao complemento para hum recto OAQ (23. 1.) Do ponto Q, em que os dous lados AQ, OQ, concorrem, descreva-se hum circulo com o intervallo QO, o qual necessariamente hade passar pello ponto A (6. 1.) Digo que o arco ACO, descripto sobre a recta dada, serà capaz de hum angulo igual ao dado.

Dem. Continue-se o lado AQ, atè que occorra ao circulo no ponto C; e tire-se a recta CO. Por ser AB, perpendicular ao diametro AC (*Constr.*) serà tangente do circulo, de quem AO, he secante (16.) logo (*pela Ant.*) serà o angulo BAO, igual ao angulo ACO; ou a qualquer outro, que existir naquelle segmento. *Q. E. &c.*

Se o angulo dado DAO, for obtuso, produzido o lado DA, para a outra parte, faça-se a mesma construcção; e serà o segmento AO, o que se pede.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XXXIV. *Probl.*

Dado hum circulo, cortar-lhe hum arco, capaz de qualquer angulo dado.

COnſtr. Pelo extremo do diametro AC, tire-ſe huma perpendicular DB; e tire-ſe tambem do meſmo extremo a recta AO, a qual forme com a ditta perpendicular hum angulo BAO, igual ao dado. Digo que o arco alterno ACO, he o que ſe pede. Conſta da 32. Fig. 37.

PROPOSIÇÃO XXXV. *Theor.*

Se dentro de hum circulo ſe cortarem duas rectas AB, ED; ſerà o rectangulo dos ſegmentos de huma AOB, igual ao rectangulo dos ſegmentos da outra EOD. Fig. 39. e 40.

DEm. Deyxado o cazo, em que as rectas ſe cortem no centro, o qual por ſi he manifeſto; 3. cazos admitte eſta Propoſição.

1. Quando huma recta ED (*Fig.* 3.) paſſa pelo centro; e corta pello meyo a outra recta AB, a qual não paſſa pelo centro: neſte cazo, tire ſe o rayo CB. Porquanto os angulos em O, ſão rectos (3.) e o rectangulo AOB, he o meſmo que o Quad. OB, ſerà o Quad. CB, igual ao { Quad. OC (47. 1.) Rect. AOB.

Porèm, por eſtar cortado o diametro ED, igualmente em C, e deſigualmente em O, tambem o Quad. CE, ou CB, he igual ao { Quad. OC (5. 2.) Rect. EOD.

Logo

Logo tirando de ambas as partes o Quad. commum OC, serà o Rect. AOB, igual ao Rect. EOD. *Q.E.&c.*

2. Quando huma recta ED (*Fig.* 39.) passa pelo centro; e não corta pelo meyo a outra recta AB: neste cazo, tire-se do centro a perpendicular CQ, e o rayo CA. O Quad. CA, he igual aos QQuad. { AQ (47.1.) QC.

Porèm o Quad. AQ, he igual ao { Rect. AOB (5.2.) Quad. OQ.

Logo o Quad. CA, he igual ao { Rect. AOB Quad. OQ Quad. QC.

isto he, he igual ao Rect. AOB, junto com o Quad. OC (47. 1.) Porèm o mesmo Quad. CA, ou CE, he tambem igual ao Rect. EOD, junto com o Quad. OC (5. 2.) logo, tirando de iguaes summas o Quad. commum OC, serà o Rect. AOB, igual ao Rect. EOD. *Q.E.&c.*

3. Quando nenhuma das rectas ED, AB (*Fig.* 40.) passa pelo centro: neste cazo tire-se pela commua secção O, o diametro FG. Qualquer dos dous rectangulos AOB, EOD, he igual ao mesmo GOF (*pelo* 2. *cazo.*) logo saõ iguaes entre si. *Q.E.&c.*

ESCHOLIO.

D*Esta Proposição se tira hum modo facil de achar huma terceira proporcional a duas rectas dadas como direy despois no Esch. da Prop.* 12. *do l.* 6.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XXXVI. *Theor.*

Se do ponto B, tomado fora de hum circulo, se tirarem duas rectas â circunferencia do mesmo; huma tangente BA, e outra secante BE: serà o rectangulo EBO (comprehendido de toda a secante EB, e da parte intermedia entre o ditto ponto, e a circunferencia BO) igual ao quadrado da tangente BA; existente entre o mesmo ponto, e o contacto A. Fig. 41. e 42. 43.

DEm. Tres cazos admitte esta Pro posição.

1. Quando a secante BE (*Fig.* 41.) passa pelo centro: e neste, tirada a recta CA, do centro ao contacto, serà o angulo CAB, recto (18.) logo o Quad. CB, serà igual aos QQuad. { CA (47. 1.) AB.

Porèm, por estar EO, cortada pelo meyo em C, e accrescentada com OB, tambem o Quad. CB, he igual ao { Rect. EBO (6. 2.) Quad. CO.

Logo, tirando de ambas as summas iguaes, os quadrados iguaes CA, CO, ficarà o Quad. BA, igual ao rectangulo EBO. *Q.E.&c.*

2. e 3. Quando a secante BE (*Fig.* 42. e 43.) não passa pelo centro; e cahe ou abaxo, ou arriba delle: e nestes, tirada pelo centro a recta BC, e do mesmo centro os rayos CA, CO; e a perpendicular CD, â secante dada (aquem cortarà pelo meyo em D, pela 3.) serà o Quad. CB, igual aos QQuad. { BA CA.

e aos QQuad. { BD (47. 1.) DC.

 Porèm

Porèm o Quad. BD, he igual ao { Rect. EBO (6.2.) / Quad. DO. }

Logo, ſubſtituindo eſtes por aquelle, ſerão os QQuad. { BA / CA. } iguaes ao { Rect. EBO / Quad. DO / Quad. DC. }

iſto he, ſerão os Quad. { BA / CA. } iguaes ao { Rect. EBO / Quad. CO. } (47. 1.)

Logo, tirando das duas ſummas iguaes os dous quadrados iguaes CA, CO, ficarà o Quad. BA, igual ao Rect. EBO. *Q.E.&c.*

COROLLARIOS.

Fig. 44. 1. SE do meſmo ponto B, ſe tirarem muitas ſecantes BE, BE, &c. todos os rectangulos EBO, EBO, &c. ſerão entre ſi iguaes: por ſerem todos iguaes a hum meſmo Quad. BA.

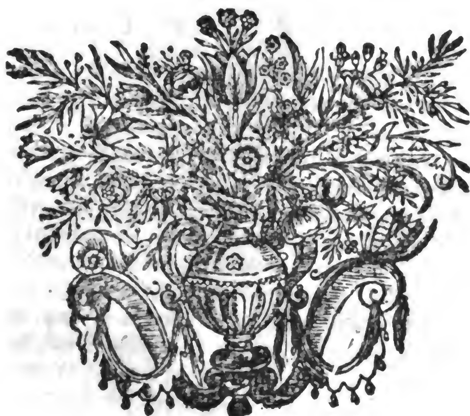
2. E ſe do meſmo ponto B, ſe tirarem duas tangentes BA, BD; ambas ellas ſerão entre ſi iguaes: por ſerem os quadrados de ambas iguaes ao meſmo rectangulo EBO.

PROPOSIÇÃO XXXVII. *Theor.*

Fig. 44. *Se tiradas duas rectas BA, BE, do meſmo ponto B, fora de hum circulo, for o rectangulo EBO, da que penetrou atè a parte concava, igual ao quadrado BA, da que ſó chegou atè a parte convexa; ſerà eſta Tangente.** He converſa da antecedente,

DEm. Tire-ſe do ponto B, a tangente BD (17.) e do centro do circulo as rectas CA, CB, CD.

CD. Porquanto o Rect. EBO, he igual ao Quad. BA (*Hyp.*) e pela ant. ao Quad. BD; serão estes dous quadrados entresi iguaes; e por consequencia as rectas BA, BD: porèm tambem são iguaes os rayos CA, CD; e commum o lado CB: logo os dous triangulos CAB, CDB, tem todos os angulos respectivamente iguaes (8. 1.) Logo sendo D, recto (18.) tambem o serà A; e por consequencia BA, he tangente do circulo (16.) *Q.E.&c.*





ELEMENTOS DE GEOMETRIA.

LIVRO IV.

ESTE LIVRO HE TODO PROBLEmatico; e todo se occupa em inscrever Figuras Regulares no circulo; razão porque he muy familiar aos Arquitectos Militares. Porèm o que o faz mais recõmendavel, he ser elle o que dà todo o fundamento â Trigonometria, dando a conhecer em partes do Rayo o valor das Cordas: e por consequencia o valor dos Senos, Tangentes, e Secantes, de que se compoem o Canon Trigonometrico. A sua Proposição mais insigne he a 10. de que se segue o mais difficil Problema da inscripção do Pentagono.

DEFINIÇÕES.

1 IGURA rectilinea *Inscripta* em hum circulo: he aquella cujos angulos existem na circunferencia do ditto circulo. * E então se diz o circulo estar *Circunscripta* à ditta Figura.

2 Figu-

2 Figura rectilinea *Circunscripta* a hum circulo: he aquella, cujos lados tocão a circunferencia do ditto circulo.* E então se diz o circulo estar *Inscripto* na ditta figura.

PROPOSIÇÃO I. *Probl.*

Fig. 1. *Inscrever em hum circulo huma recta, igual a outra dada O; com tanto que não seja mayor que o diametro.*

COnstr. Tome-se no compasso a recta dada; e posta huma ponta em qualquer ponto A, da circunferencia, descreva-se com a outra hum arco, o qual a corte em outro ponto B. Tire-se a recta AB, &c. He manifesto (*Ax.* 1.)

PROPOSIÇÃO II. *Probl.*

Fig. 2. 2. *Inscrever em hum circulo hum triangulo equiangulo com outro dado QOP.*

COnstr. Tire-se a tangente AC: e forme-se no ponto B, do contacto, o angulo ABE, igual à P, e o angulo CBD, igual à Q (23.1.) tire-se a recta ED, e ficará inscripto no circulo hum triangulo equiangulo com o dado.

Dem. O angulo D, he igual a ABE (32.3.) isto he, pela constr. ao angulo P: pela mesma razão o angulo E, he igual ao angulo Q: logo o angulo B, tambem he igual a O (*Cor.* 9.32.1.) e por consequencia &c.

PROPOSIÇÃO III. *Probl.*

Circunscrever a hum circulo hum triangulo equiangulo com outro dado NLM. Fig. 3. 3.

COnstr. Continue-se a base do triangulo dado para huma, e outra parte; de sorte, que se formem dous angulos externos N,M: e formem-se no centro do circulo outros dous angulos iguaes a elles ECO,FCO. Tirem-se pelos tres pontos da circunferencia E,O,F, outras tantas tangentes, as quaes concorrão nos pontos B,A,D. Digo que o triangulo ABD, circunscripto no circulo (*Def.*2.) he equiangulo com o dado.

Dem. No quadrilatero ECOA, os angulos E,O, são rectos (18. 3.) logo os outros dous A,C, são tanto como 2. rectos (*Esch.* 1. *da* 32. 1.) porèm tambem são tanto como 2. rectos os outros dous em N, externo , e interno (13. 1.) logo sendo C, igual ao primeiro (*Constr.*) serà A, igual ao segundo. Do mesmo modo provarey ser D, igual ao interno M; e por consequencia B, igual à L: logo &c.

ESCHOLIO.

SUppuz, que as 3. *tangentes hande concorrer em* 3. *pontos: o que tambem suppuz em semelhante cazo na* 25. *do* 3. *Porèm convem demonstrallo. Porquanto os angulos E,O, são rectos, tirada pela imaginação huma recta EO (a qual necessariamente hade serrar espaço com os lados do angulo ECO) os angulos AEO,AOE, são menores que* 2. *rectos: logo as rectas EA,OA, hande concorrer para a quella parte em algum ponto A; como consta do Esch. do* 31. *do* 1.

PROPO-

PROPOSIÇÃO IV. *Probl.*

Inſcrever hum circulo em hum triangulo dado ABD.

COnſtr. Dividão-ſe pelo meyo quaes quer dous angulos A,D, do triangulo dado (9. 1.) e do ponto C, em que concorrem as rectas, que os dividem, tirem-ſe tres perpendiculares aos lados CE,CF, CO: com o intervallo de qualquer deſtas CE, deſcreva-ſe hum circulo. Digo que eſte tocarà os 3. lados do ditto triangulo.

Dem. Nos triangulos ACE,ACO, os angulos em A, ſão iguaes; em E,O, rectos; e o lado AC, he cõmum: logo os lados CE,CO, ſão iguaes (26. 1.) Do meſmo modo provarey, ſerem tambem iguaes os lados CO,CF: logo o circulo, que deſcripto do ponto C, paſſar por E, paſſara tambem por O, e F; e tocarà o triangulo nos dittos pontos (16. 3.) *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO V. *Probl.*

Fig. 33. do 3. *Circunſcrever hum circulo a hum triangulo: ou (que he o meſmo) deſcrever hum arco por tres pontos dados E,O,F, os quaes não eſtejão em huma linha recta.*

COnſtr. Ajuntem-ſe os 3. pontos com duas rectas EO,OF; e cortem-ſe eſtas pelo meyo com duas perpendiculares AC,DC (10.1.) do ponto C, em que eſtas concorrem (*Eſch. ant.*) deſcreva-ſe hum circulo com o intervallo CE. Digo &c.

Dem. Tirem-ſe as rectas CE,CO,CF. Nos triangulos CQO,CQF, os lados QO,QF, ſão iguaes; QC, commum;

QC, comum; e os angulos em Q, rectos: logo as bases CO, CF, são tambem iguaes (4. 1.) Do mesmo modo provarei, serem tambem iguaes CO, CE: logo o circulo, que descripto do ponto C, passar por E, passarà tambem por O, e F. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO VI. e VII. *Probl.*

Dado hum circulo, inscrever-lhe, e circunscrever-lhe hum Quadrado. Fig. 4.

COnstr. 1. part. Tirem-se os diametros GH, QL, em angulos rectos: e ajuntem-se os 4. pontos G, Q, H, L, com 4. rectas: ficarà inscripto o Quadrado. A demonstração consta da 4. do 1. e da 31. do 3.

2 Part. Tirem-se pelos mesmos 4. pontos 4. tangentes, as quaes se cortem nos pontos A, B, D, E: ficarà circunscripto o Quadrado. A demonstração consta da 18. do 3: do Cor. 2. da 36. do mesmo: e da 28. e 34. do 1.

ESCHOLIO.

O Quadrado circunscripto he duplo do inscripto. Dem. O angulo QGL, he recto (31. 3.) logo o Quad. QL (isto he, o Quad. AE) he igual aos 2. QQuad. QG, GL (47. 1.) isto he, he duplo do Quad. QG.

PROPOSIÇÃO VIII. e IX. *Probl.*

Dado hum Quadrado, inscrever-lhe, e circunscrever-lhe hum Circulo. Fig. 5.

COnstr. Tirem-se os diametros do Quadrado GH, QL; e do ponto C, em que se cortão, descreva-se

creva-ſe hum circulo com o intervallo CG: ſerà eſte o circunſcripto. Tire-ſe do meſmo ponto huma perpendicular a qualquer lado CB; e deſcreva-ſe com eſte intervallo outro circulo: ſerà eſte o inſcripto.

Dem. Porquanto no triangulo GLH, os lados GL, HL, ſão iguaes; ſerão os angulos oppoſtos G,H, tambem iguaes (5. 1.) porèm L, he recto: logo G,H, ſão ſemi-rectos [*Cor.* 11. *da* 32. 1.] Do meſmo modo ſe prova, que todos os angulos rectos do quadrado eſtão cortados pelo meyo: logo todos os triangulos GCL, LCH, &c. ſão Iſóſceles (6. 1.) e por conſequencia o circulo, que deſcripto do ponto C, paſſar por hum angulo G, paſſarà por todos &c.

Item: tiradas do meſmo ponto C 4. perpendiculares aos 4. lados do quadrado, todas ellas ſão iguaes [Porquanto nos triangulos LAC, LBC, os angulos A, B, ſão rectos; os 2. em L iguaes; e o lado LC commum: logo CA, CB, ſão iguaes (26. 1.) e aſſim dos de mais] logo o circulo, que deſcripto do ponto C, paſſar por B, paſſarà tambem por E, D, A, &c.

PROPOSIÇÃO X. *Probl.*

Fig. 6. e 7. *Conſtruir hum triangulo Iſóſceles ACB, cujos angulos da baſe A,B, ſejão duplos do angulo do vertice C.*

COnſtr. Corte-ſe qualquer recta CB (*Fig.* 6.) de tal ſorte em D, que o rectangulo da toda, e de huma parte CBD, ſeja igual ao quadrado da outra parte CD (11. 2.) Do ponto C, com o intervallo CB, deſcreva-ſe hum arco, no qual ſe inſcreva a recta AB, igual à CD (1.) e tire-ſe o rayo CA. Digo que o triangulo ACB, he o Iſóſceles que ſe pede.

Dem. Deſcreva-ſe pelos 3. pontos C, D, A (*Fig.* 7.) hum

hum circulo [5.] e tire-ſe a recta AD. Porquanto o rectangulo CBD, he igual ao quadrado CD, ou AB (*Conſtr.*) ſerà AB, tangente do circulo CDA, de quem AD, he ſecante (37. 3.) logo o angulo BAD, he igual ao angulo C, no ſegmento alterno (32.3.) Accreſcente-ſe a huma, e outra parte o angulo DAC; ſerà o angulo total A [ou B, ſeu igual] igual aos 2. DCA, DAC. Porém tambem o angulo externo BDA, he igual aos meſmos 2. angulos (32.1.) logo o triangulo BAD, he Iſóſceles (6.1.) e por conſequencia, ſendo CD, igual à AB (*Conſtr.*) tambem o ſerà a AD: logo tãbem he Iſóſceles o triangulo CDA; e por conſequencia os angulos da baſe DCA, DAC, ſão iguaes (5. 1.) Porèm fica demonſtrado, que o angulo externo BDA, ou ſeu igual B, he igual à quelles 2. logo he duplo de cada hum; iſto he, de C. *Q.E.&c.*

COROLLARIO.

QUalquer angulo de baſe do ſobreditto triangulo contem $\frac{2}{5}$. de 2. rectos; ou $\frac{4}{5}$. de hum recto: e o do vertice contem $\frac{1}{5}$. de 2. rectos, ou $\frac{2}{5}$. de hum recto. Conſta facilmente da 32. do 1.

PROPOSIÇÃO XI. *Probl.*

Inſcrever em hum circulo dado hum Pentagono Regular. Fig. 1.

COnſtr. Deſcreva-ſe hum triangulo Iſóſceles, como enſina a Prop. ant. e inſcreva-ſe no circulo dado outro equiangulo ABC (2.) Dividão-ſe pelo meyo os angulos da baſe A, C; e continuem-ſe as rectas, que os dividem, atè que occorrão à circunferencia em D,

E: ajuntem-se todos os 5. pontos A,D,B,E,C, com outras tantas rectas; e ficarà inscripto o Pentagono.

Dem. Consta da constr. que os 5. angulos B.*o.u u.o.* são iguaes: logo tambem os arcos, em que insistem, serão iguaes (28.3.) e por consequencia as subtensas, ou lados da Figura (27.3.) Sendo estes iguaes, são tambem iguaes os angulos, que nelles insistem (29. 3.) logo tambem os da figura (compostos de 3. delles) serão iguaes: e por consequencia &c. (*Def.* 3.)

COROLLARIO.

O angulo do Pentagono contem $\frac{3}{5}$. de 2. rectos. A razão he; porque todos os angulos em B, são iguaes entre si: porem o do meyo, pelo Cor. da ant. he $\frac{1}{5}$. de 2. rectos: logo &c.

ESCHOLIO.

Esta inscripção de Euclides *he engenhosa; porém muito mais expedita, e não menos engenhosa, he*
Fig. 12. *á de* Ptolemeo *no l.* 1. *do Almagesto. Tirem-se em angulos rectos os* 2. *diametros do circulo HG,CF: e dividido o rayo OG, pelo meyo em L, descreva-se deste ponto, com o intervallo LF, hum arco, o qual corte o outro rayo OH, em Q. Digo que a recta QF, he o lado do Pentagono; e QO, a do Decagono, que se houverem de inscrever naquelle circulo. A Dem. não he deste lugar; porèm dar-se-hà despois no Esch. da Prop.* 10. *do l.* 13. *Entre tanto darey aqui o seguinte*

Problema

Problema.

Dada a recta AB, construir sobre ella hum Pentagono Regular. Fig. 9.

Divida-se a ditta recta de tal sorte em O, que o rectangulo BAO, seja igual ao quadrado OB: continue-se a mesma recta para huma, e outra parte, atè que AG, BF, sejão iguaes ao segmento mayor OB. Descrevão-se dos pontos A, G, com o intervallo AB, 2. arcos, os quaes se cortem em D; e dos pontos B, F, outros 2. os quaes se cortem em E. E com o mesmo intervallos descrevão outros 2. arcos dos pontos D, E, os quaes se cortem em C. Ajuntem-se todos estes 5. pontos com outras tantas rectas, e ficarà formado o Pentagono, que se pede.

Dem. *Consta da Constr. que a figura descripta he equilatera. Provo que seja equiangula. Tire-se a recta GD: o triangulo GDA, he o isósceles, que ensina a construir a Prop. 10. logo o angulo DAG, contem $\frac{2}{5}$. de 2. rectos; e por consequencia o conjunto DAB, contem $\frac{3}{5}$. o mesmo digo do angulo EBA: logo hum, e outro são angulos do Pentagono. Porêm daqui se infere que tambem os outros 3. D, C, E, tem a mesma quantidade; se se imaginão continuados os lados AD, BE, e formados de fora outros 2. triangulos Isósceles, como os primeiros: logo &c.*

PROPOSIÇÃO XII. *Probl.*

Circunscrever a hum circulo hum Pentagono Regular. Fig. 11.

Constr. Inscreva-se (*pela Ant.*) hum Pentagono no circulo dado: e pelos 5. pontos, em que o toca,

toca, tirem-ſe outras tantas tangentes: digo que eſtas formarão o Pentagono, que ſe pede.

Dem. Tirem-ſe os rayos OH,OF,OG, &c. e as rectas OA,OB, &c. Os triangulos AHO,AFO, ſão reſpectivamente equilateros; por ſerem HO,FO, rayos; AO, commua; e as rectas AH,AF tangentes, tiradas do meſmo ponto (*cor.* 2. *da* 36. 3.) logo tanto os 2. angulos em A, como os 2. em O, ſão iguaes (8. 1.) o meſmo digo dos triangulos BFO,BGO. Porèm os angulos totaes HOF,FOG, ſão iguaes entre ſi; por inſiſtirem em arcos iguaes (29. 3.) logo tambem as ſuas metades; e por conſequencia, todos os 4. angulos em O, ſerão iguaes: logo, tendo os triangulos AFO,BFO, os angulos em O iguaes, em F rectos, e o lado FO commum, tambem as metades de A,B (26. 1.) e por conſequencia os meſmos todos, ſerão iguaes. Demonſtrada aſſim a igualdade dos angulos da figura, conſta pelo meſmo diſcurſo, a igualdade dos lados: logo &c.

ESCHOLIO.

COm eſte artificio ſe pode circunſcrever a qualquer circulo qualquer figura regular; iſto he, inſcrevendo-lhe primeiro outra figura ſemelhante.

PROPOSIÇÃO XIII. e XIV. *Probl.*

Fig. 10. *Dado hum Pentagono Regular; inſcreverlhe, e circunſcrever-lhe hum circulo.*

C*Onſtr.* Cortem-ſe pelo meyo quaeſquer 2. angulos A,B, do Pentagono dado: e do ponto O, em que concorrem as rectas, que os dividem, tire-ſe huma perpendicular OF, a qualquer dos lados. Digo que,

que, ſe do ponto O, ſe deſcrever hum circulo com o intervallo OA, tocarà eſte todos os angulos: e ſe ſe deſcrever do meſmo ponto outro circulo, com o intervallo OF, tocarà eſte todos os lados do Pentagono.

Dem. Tirem-ſe do ponto O, rectas a todos os angulos, e perpendiculares a todos os lados. Os triangulos OAD, OAB, tem os angulos em A iguaes; e iguaes reſpectivamente os lados, que os comprehendem: logo os angulos ABO, ADO, ſão iguaes entre ſi (4.1.) Porèm o primeiro he metade do da figura (*Conſtr.*) logo tambem o ſegundo; e pelo meſmo diſcurſo, todos os angulos deſta eſtão cortados pelo meyo; e todos os triangulos formados ſobre ſeus lados ſão Iſóſceles (6.1.) logo o circulo que deſcripto do ponto O, paſſar por hum angulo, paſſarà por todos &c.

Da meſma ſórte: os triangulos OAH, OAF, tem os angulos em A iguaes; em H, F rectos; e o lado AO commum: logo as perpendiculares OH, OF, ſão iguaes (26.1.) Porém por eſtarem divididos pelo meyo todos os angulos da figura, todas as outras perpendiculares ſão iguaes a eſtas 2. logo o circulo, que deſcripto do ponto O, tocar hum lado, tocarà todos os outros. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XV. *Probl.*

Inſcrever em hum circulo dado hum Hexagono Regular. Fig. 13.

COnſtr. Tire-ſe o diametro AB; e deſcrevão-ſe dos ſeus extremos com o intervallo do ſemi-diametro 2. arcos COF, EOD, os quaes cortem a circunferencia nos 4. pontos C, F, E, D. Digo, que ſe ſe ajuntarem todos os 6. pontos com outras tantas rectas, ficarà formado, e inſcripto o Hexagono, que ſe pede.

Dem.

Dem. Tirem-ſe rayos a todos os angulos da figura. Os 4. triangulos COA, AOF, EOB, BOD, ſão equilateros (*Conſtr.*) logo cada hum dos ſeus angulos contem $\frac{1}{3}$. de 2. rectos [*Cor.* 12. *da* 32. 1.] porèm os 3. em O, para huma, e outra parte do diametro, ſão iguaes a 2. rectos [13. 1.] logo cada hum dos intermedios EOC, DOF, tambem contem $\frac{1}{3}$. de 2. rectos; e por conſequencia tambem aquelles 2. triangulos ſão equilateros: logo, ſendo todos iguaes, conſtarà a figura inſcripta de lados, e angulos iguaes. *Q. E. &c.*

COROLLARIOS.

1. O Lado do Hexagono he igual ao rayo do circulo, em que eſtâ inſcripto.

2. O angulo do Hexagono contem $\frac{2}{3}$. de 2. rectos.

3. Se ſe tirar outro diametro GH, perpendicular ao primeiro AB; e dos extremos deſte ſe deſcreverem outros 2. arcos com o intervallo dos primeiros: ficarão determinados os pontos de hum Duodecagono Regular, com huma ſó abertura de compaſſo; o que he de grande uſo para a *Gnomonica*.

Fig. 14.

4. Do ditto ſe infere huma faciliſſima inſcripção de hum triangulo equilatero em hum circulo; que he, tirado o diametro AB, e deſcripto de qualquer de ſeus extremos A, hum ſò arco QCF; ajuntar os 3. pontos Q, B, F.

5. O lado QF, do ditto triangulo corta a quarta parte do diametro AB, que he AO.

Dem. Os angulos CQO, AQO, por inſiſtirem em arcos iguaes, ſão iguaes (29. 3.) ſão tambem iguaes os lados QC, QA (*Cor.* 1.) e QO commum: logo as baſes AO, OC, tambem ſão iguaes (4. 1.) e por conſequencia AO, metade do ſemi-diametro, he a quarta parte do diametro.

O 6. Cor. podera ſer o ſeguinte.

Problema

Problema.

COnstruir sobre huma recta dada AF, hum Hexagono Regular. Fig. 13.

Descreva se sobre a recta dada hum triangulo equilatero AOF; e do ponto O, com o intervallo OA, descreva-se hum circulo, em cuja circunferencia se accõmode 6. vezes o ditto rayo. Será este &c. Consta do ditto.

PROPOSIÇÃO XVI. *Probl.*

Inscrever em hum circulo dado hum Quindecagono Regular. Fig. 15.

COnstr. Inscreva-se pela 12. o lado do Pentagono B 5. e pelo *Cor.* 4. *da Ant.* o lado do Triangulo Equilatero B 3: divida-se pelo meyo a differença dos arcos 5 3: e será &c.

Dem. Considere-se a circunferencia do circulo dividida em 15. partes; e que destas tocão 3. ao arco B5. e 5. ao arco B3. logo tocarão 2. â differença dos arcos; e huma â sua metade.

COROLLARIO.

DEste modo se poderão inscrever em hum circulo muitas outras Figuras Regulares; isto he, inscrevendo dous lados, das inscriptas nas Proposições antecedentes; e dividindo a differença dos arcos pela differença dos denominadores: porquanto a ultima parte dará o lado de huma figura de tantos lados, quantos indica o producto dos mesmos denominadores: v. g. Inscreva-se o lado do Quadrado B4. e o do Hexagono B6. e parta-se a differença dos dous arcos 6. 4. pela differen-

O ça dos

ça dos denominadores, que he 2. ferà a metade da ditta differença o lado de huma figura de 24. lados, que he o producto de 4. por 6.

ESCHOLIO.

ATè agora senão tem descuberto modo Geometrico de inscrever em hum circulo, sómente com regoa, e compasso, huma Figura de 7.9.11. e 13. lados, &c. porquanto esta divisão depende da divisão do circulo em quaesquer partes; aqual ainda se deseja. Porèm, pelo que toca à praxe, darey aqui 2. Problemas mecanicos; reservando outros mais engenhosos para a Geometria Practica, e Arquitectura Militar.

Problema. I.

INscrever em hum circulo dado hum Polygono Regular de 9. lados.

Divida-se a circunferencia do circulo [isto he 360. gr.] pelo denominador da Figura [isto he por 9.] e o quociente, que são 40. serão os grãos, que tocão a cada angulo no centro, correspondente a cada lado. Forme-se pois no centro do circulo hum angulo de 40. gr. pelo Eschol. da 23. do l. 1. e determinado o arco, applique-se 9. vezes a Corda &c. O mesmo digo de outra qualquer Figura.

Problema. 2.

Fig. 16. DAda a recta EG, formar sobre ella hum Heptagono Regular.

Supponho, que o angulo do Quadrado a respeito dos angulos das mais Figuras [desde 5. atè 12. lados] tem as proporções, que indica a Taboa seguinte; a qual foy calculada pelo Theor. 2. da 32. do 1.

TABOA.

T A B O A.

Figuras	*Proporções*	*Differenças*	*Gráos de cada parte.*
V.	5. à 6.	1.	18.
VI.	3. à 4.	1.	30.
VII.	7. à 10.	3.	12. $\frac{6}{7}$.
VIII.	2. à 3.	1.	45.
IX.	9. à 14.	5.	10.
X.	5. à 8.	3.	18.
XI.	11. à 18.	7.	8. $\frac{2}{11}$.
XII.	3. à 5.	2.	30.

Conſtr. *Deſcreva-ſe pois de qualquer extremo G, da recta dada hum arco, à deſcripção, e tire-ſe a perpendicular GO. Buſque-ſe na Taboa a proporção entre o angulo do quadrado, e o do Heptagono [que he de 7. à 10. e a differença 3.] e dividido o quadrante EO, em 7. partes iguaes, tomem-ſe 3. deſtas, de O atè F: tire-ſe a recta GF, igual a EG, e deſcreva-ſe pelos 3. pontos E,G,F, hum circulo (5.) digo que eſte comprehenderà o Heptagono &c. A difficuldade eſtà em dividir o quadrante naquellas partes iguaes, que diz a Taboa: porèm ſe ſe uſar de hum ſemi-circulo graduado, ſe acharâ facilmente, pelos gráos da ultima colunna, o valor de cada parte.*

Theorema.

Concluirey este Livro com hum celebre Theorema de Proclo, que serve para os Arquitectos: e he, que sómente com 3. Figuras Regulares se pode serrar espaço; a saber com 4. Quadrados, ou com 6. Triangulos Equilateros, ou com 3. Hexagonos. Consta manifestamente do Cor. 3. da 13. do 1. supposto o que fica ditto do valor dos angulos destas 3. Figuras na Def. 32. do 1. l. e no Cor. 12. da 32. do mesmo; e no Cor. 2. da 15. deste.



ELEMEN-



ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA.
LIVRO V.

A DOUTRINA DAS PROPORÇÕES, de que trata Euclides *neste, e no seguinte Livro, he como a alma da Geometria; e a que faz mover a todas as partes os seus Theoremas fundamentaes. Porèm sendo tam subtil, como necessaria, alguns a tratão com tanta prolixidade, e outros tão succintamente, que tenho por sem duvida são muy poucos os principiantes, que fazem pleno conceito della; e a comprehendem como he razão.*

Todo o defeito nasce da Def. 5. em que Euclides, *por via de* Equi-multiplices, *explica de tal sórte, ou a natureza, ou a propriedade das Razões Semelhantes, e Dessemelhantes, que verdadeiramente ficão embaraçadas, e pouco perceptiveis as Demonstra-*

monſtrações: razão porque outros (por não confundir logo ao principio os principiantes) a explicão ſó por numeros, e por huns termos tam ſuperficiaes, que as Demonſtrações ficão ineptas, e ſem energia: e o peyor he, que a doutrina fica mutila, e ſem ſe eſtender à mais que à Quantidades Racionaes; *ſendo aſſim, que não ſó deverá comprehender as* Irracionaes; *ſenão ainda todas aquellas couzas, que tem connexão com a Quantidade; como ſão* Motos, Velocidades, Durações, Pezos, Forças, Intenções de vozes &c.

Pelo que parece-me que farey qualquer ſerviço aos candidatos da Geometria, ſe lhes expuzer eſte livro com toda a claridade, energia, e deſembaraço; regulando as ſuas Demonſtrações pelo Methodo dos Modernos, chamado das Equi-aliquotas: *cujo principio huma vez demonſtrado, nem moleſta por prolixo, nem deixa ineptas as Demonſtrações.*

DEFINIÇÕES.

1. PArte: ſe diz huma quantidade pequena comparada com outra mayor.* He em 2. differenças; *Aliquota*, e *Aliquanta*: a *Aliquota*, he a que repetida algumas vezes mede exactamente a quantidade mayor: a *Aliquanta*, he a que repetida não a mede; porque ou excede, ou não chega: v.g. 3. he parte aliquota de 9. e aliquanta de 8.

2. *Multipla*, ou *Multiplice* de alguma quantida-

de

de: he a que contem precisamente algumas vezes a ditta quantidade: v.g. 12. he multipla, ou multiplice de 3. * *Aliquota*, e *Multiplice* são correllativos.

3. *Razão*, ou *Proporção*: he o respeito, que ha entre 2. quantidades homogeneas, segundo o modo com que huma inclue, ou he incluida na outra. * Quantidades homogeneas [isto he da mesma natureza] são aquellas que diminuidas, ou augmentadas se podem exceder, ou igualar; como linhas com linhas; superficies com superficies; angulos com angulos &c. Entre estas sómente he que se pode dar comparação.

* *Em toda a Razão ha 2. termos; hum que se compara, e outro com quem se compara: o primeiro se chama* Antecedente; *o segundo* Consequente. *A Razão, ou he de igualdade, ou de desigualdade; e esta, ou de mayor, ou de menor desigualdade. Razão de igualdade, he quando se compara igual com igual: Razão de desigualdade, he quando se compara mayor com menor; ou menor com mayor.*

4. *Razão*, ou *Proporção Racional*: he a que se dâ entre 2. quantidades commensuraveis; ou que se podem exprimir por numeros. *Razão, ou Proporção Irracional*: he a que se dâ entre 2. quantidades incômensuraveis, ou que se não podem exprimir por numeros, nem inteiros, nem quebrados. * Quantidades commensuraveis são aquellas, a quem mede alguma medida commua: incommensuraveis, as que nenhuma medida commua pode medir.

5. Duas Razões A para B; C para D, são *Semelhantes, Iguaes*, e as *Mesmas*; quando o antecedente da primeira A contem, ou he conteudo do mesmo modo no seu consequente B; como o antecedente da segunda C contem, ou he conteudo no seu consequente C. * Porèm, que couza seja este conter, ou ser conteudo *do mesmo modo*, quando as quantida- Fig. 1.

des

des são incommensuraveis; isto he o que se dezeja saber, e o que não se acha com claridade na Def. de *Euclides*, como logo veremos.

Os 4. termos de 2. Razões Semelhantes se chamão ordinariamente Proporcionaes; *razão porque alguns fazem differença entre* Razão, *e* Proporção: *a* Razão, *dizem, he aquella, que se dá entre duas quantidades: a* Proporção, *a que se dá entre duas razões. Porém outros confundindo a Razão com a Proporção, chamão* Proporcionalidade, ou Analogia, *á Semelhança das Razões. Cada hum pode fallar como quizer; porque de hum, e outro modo costumão fallar Authores graves. Veja-se* Clavio, Tacquet, e De-Chales.

Fig. 2. 6. Duas razões A para B, C para D; são *Dessemelhantes, Desiguaes, e Diversas*; quando o Ant. da 1. A inclue, ou he incluido differentemente em seu Conseq. B, que o Ant. da 2. C em seu Conseq D.

7. *Partes Semelhantes*: são as que se contem em seus todos igualmente; e do mesmo modo; isto he, que tem para seus todos a mesma razão.

NOTA.

Q*Uando as partes Semelhantes são* Aliquotas, *ou ao menos* Aliquantas Racionaes; *facil he de explicar, que couza seja o* Conterse em seu todos do mesmo modo; *ou* Ter para elles a mesma razão: *porquanto, se são* Aliquotas, *v.g metades, terças, quartas &c. ja se sabe, que cada todo contem duas vezes a sua metade; tres a terça; e quatro a quarta &c. E se são* Aliquantas Racionaes, *v. g. metades acompanhadas de terças, quartas, ou quintas das mesmas metades [o mesmo digo de outras quaesquer partes] facilmente se reduzem a aliquotas; e se vê quantas vezes o todo contem as partes das partes.*

Porém quando as partes semelhantes são Irracionaes

naes: *nem tem medida commua por donde se regulem; não sómente he difficil, senão impossivel explicar que couza seja*, o Conter-se nos seus todos do mesmo modo: *v. g Todos os diametros tem a mesma razão para os lados dos seus quadrados, como constarà da 4. do l. 6. e todos elles são raizes de hum quadrado igual aos 2. dos lados, como consta da 47. do 1. porèm ninguem explicou ategora em termos claros, em que consiste a identidade destas razões.*

Supponhamos que o lado CE tem 3 palmos, cujo quadrado são 9. e que o lado CB tem 5. cujo quadrado saõ 25 serà o diametro DE raiz quadrada de 18. isto he, pouco menos de 4. $\frac{1}{4}$: e serà AB raiz quadrada de 50. isto he, pouco mais de 7: porèm este pouco mais, ou poueco menos he de tal natureza, que nem por numeros inteiros, nem quebrados (por mais, e mais que se quebrem infinitamente) se póde explicar: nem se acharà jàmais medida alguma commua, por pequena que seja, que meça exactamente os lados, e o diametro de qualquer quadrado; como demonstra Euclides *na ultima do l.* 10. Fig. 3.

Peloque, sendo impossivel reduzir a hum conceyto commum a Semelhança de todas as Razões, assim Racionaes, como Irracionaes, para que debaixo de huma mesma regra possão proceder uniformes todas as demonstrações; não hà mais arbitrio, que recorrer a alguma Paixão, ou Propriedade da ditta Semelhança; a qual de tal sorte lhe comvenha, e recorra com ella, que seja hum distinctivo infallivel entre a Semelhança, e a Dessemelhança das Razões: o qual distinctivo, àlem de ser certo, e infallivel, deve tambem ser clarissimo, e evidente; como he, e deve ser todo o Primeiro Principio.

A Propriedade que descobrio Euclides, *e a que insinua na Definição 5. he*: Que então duas razões são semelhantes, quando tomadas quaesquer equi-multiplices dos antecedentes, e quaesquer equi-multiplices dos

P conse-

consequentes; sempre aquelles são ou juntamente
Fig. 1. mayores, ou juntamente menores, ou juntamente iguaes a estes. *V.g. seja A para B, como C para D: e tomem se 20A, e 20C (isto he, equi-multiplices dos antecedentes) e 30B, 30D (isto he, equi-multiplices dos consequentes)* digo, *que sempre que 20A for mayor, ou menor, ou igual a 30B; serà tambem 20 C, ou mayor, ou menor, ou igual à 30D: e pelo contrario &c.*

Porém esta Propriedade padece muitas instancias: porquanto, deyxando a ligeira nota de alguns, de que Euclides *define assim a Propriedade, e não a Natureza das Razões Semelhantes; o que com razão notão todos, he, que esta Propriedade não he de nenhum modo evidente; nem tam clara, que possa passar por Primeiro Principio: antes, como despois veremos, he huma verdade tam escura, que necessita mais de demonstração, do que outras muitas verdades, que della dependem. Porêm, deixando tambem esta nota, â qual todavia se póde acodir, demonstrando o que* Euclides *suppoem; o que a mim me faz mais força, he, que fundadas neste Principio as Proposições do 5. Livro, ficão as suas demonstrações tam prolixas, e cançadas, que se fazem ordinariamente imperceptiveis aos principiantes. Peloque em lugar das* Equi-multiplices de Euclides, *julguey mais conveniente seguir o Principio dos Modernos das* Equi-aliquotas; *o qual he desta maneira.*

Razões Semelhantes são aquellas, quando divididos os antecedentes em quaesquer partes aliquotas semelhantes v.g. 10. 100. 1000. 10000, &c. tantas respectivamente cabem a hum, como a outro consequente. *O que digo dos antecedentes a respeito dos consequentes, digo tambem dos consequentes a respeito dos antecedentes.*
Fig. 3. *V.g. seja CB para BA, como CE para ED: e dividão-se os antecedentes CB, CE, em* 10. 100. 1000. *ou quaesquer partes aliquotas semelhantes: Digo*

que

que de qualquer modo que se faça a divisaõ, sempre hande caber tantas aliquotas de CB em BA, quantas de CE em ED: e que se tantas couberem do mesmo modo em hum, e outro consequente, as Razões serão semelhantes: com advertencia porém que se as dittas aliquotas, em alguma divisão, repetidas igualarem os consequentes, as quantidades serão Racionaes; se não, serão Irracionaes; porèm nunca se darà cazo, em que caybão mais a hum, que a outro consequente. Este em summa o Principio dos Modernos, chamado das Equialiquotas, o qual demonstraremos a baxo no §. 2. dos Theoremas Fundamentaes.

8. As quantidades A,B,C,D,E, &c. são *Continuamente proporcionaes*: quando cada huma das intermedias B,C,D, se toma 2 vezes na comparação; huma vez como consequente a respeito da que fica atraz, e outra vez como antecedente a respeito da que vay adiante: v.g. A he para B, como B para C: B he para C, como C para D: e C he para D, como D para E, &c. Fig. 4.

9. As quantidades A,B,C,D, são *Descontinuadamente proporcionaes*: quando nenhuma se toma duas vezes na comparação: v.g. A he para B, como C para D. Fig. 5.

10. Nas quantidades continuamente proporcionaes A,B,C,D, &c. a primeira A he para terceira C, em *Duplicada razão* da mesma primeira A para a segunda B: e a primeira A he para a quarta D em *Triplicada razão* da mesma primeira A para a segunda B,&c. Fig. 4.

11. *Quantidades Homologas*: são os termos semelhantes de semelhantes razões: isto he, antecedentes com antecedentes, e consequentes com consequentes: v. g. A he para B, como C para D: digo que A e C são quantidades Homologas; como tambem B, e D.

* As seguintes Definições pertencem aos differentes modos de argumentar, de que usão os Geometras;

metras ; que he o principal fim para que foi instituido este livro. Para sua intelligencia , e para mayor expedição das Demonstrações , usarey daqui por diante das seguintes

NOTAS.

+ Significa *Composição* : como A+B, vale o mesmo que A mais B.

— Significa *Diminuição*: como A—B, vale o mesmo que A menos B.

: Significa *Comparação*: como A : B, vale o mesmo que A para B.

= Significa *Igualdade*: como A=B, vale o mesmo que A igual à B.

: = : Significa *Igualdade de Razões*: como A:B= C: D, vale o mesmo que A he para B, como C para D. Isto supposto, dem-se 4. termos proporcionaes

A : B= C : D.
9 : 3= 6 : 2.

e seja A para B, como C para D. Digo que

12. *Alternar*, ou *Permutar* : he o mesmo que comparar hum antecedente com outro antecedente; e hum consequente com outro consequente : v. g. A : C= B : D.

14. *Compôr* : he comparar os antecedentes, juntos com os consequentes, com os mesmos consequentes : v.g. A+ B : B= C+D : D.

15. *Dividir* : he comparar os antecedentes ; mulctados dos consequentes , com os mesmos consequentes : v.g. A— B : B= C— D : D.

16. *Converter*: he comparar os antecedentes com os mesmos antecedentes, mulctados dos consequentes: v.g. A : A— B= C : C— D.

17. *Argumentar por Igual*. *ou por Igualdade de Razões* : he quando dadas duas series de quantidades com igual numero de termos, e de semelhantes razões [ou sejão continuadamente , ou descontinuadamente pro-

porcionaes] ſe comparão duas quantidades correſpondentes, omittidas todas as intermedias: v.g.

Primeira Serie	A : B : C : D, &c.
	8 : 4 : 6 : 2.
Segunda Serie	E : F : G : H, &c.
	12 : 6 : 9 : 3.

Seja A para B, como E para F: B para C, como F para G: C para D, como G para H. Digo que ſe ſe compara A com D, e E com H [termos correſpondentes ſegundo a ordem das comparações] ſe argumenta por Igual; ou por Igualdade de Razões.

* A comparação por igual he de 2. modos: *Ordenada*; ou *Perturbada*. A *Ordenada*, he quando as Razões da ſegunda Serie correſpondem pela meſma ordem âs Razões da primeira: iſto he, a primeira â primeira; a ſegunda â ſegunda; e a terceira â terceira, &c. A *Perturbada*, he quando ſe promove, ou atraza, ou perturba a ordem: iſto he, quando a primeira da primeira correſponde â ſegunda da ſegunda: a ſegunda â terceira: e a ultima â primeira, &c. O exemplo da *Ordenada* he o que fica arriba; o da *Perturbada* he o ſeguinte; em que a ordem das letras indica a ordem das razões.

Primeira Serie	A : B : C : D, &c.
	8 : 4 : 6 : 2.
Segunda Serie	H : E : F : G, &c.
	36 : 12 : 6 : 9.

18 Dadas quaeſquer quantidades A,B,C,D,&c. a razão da primeira para a ultima; iſto he, de A para D, he *Composta* de todas as razões entremedias; A para B; B para C; C para D. &c. * Eſta Definição, e a 5. do 6. de quem ella depende, demonſtraremos abaixo no Appendiz 1. §. 12.

THEO-

THEOREMAS
Fundamentaes.

Para que a doutrina das Proporções fique firme, e bem assentada nos seus fundamentos; he necessario demonstrar aquelles dous Principios, que dissemos arriba na Nota â Def. 7. para que em qualquer delles que se proceda, fiquem sem escrupulo as demonstrações. Os principiantes poderão omittir todo o §. 1. e passar immediatamente ao 2. e quando ainda este lhes seja molesto, podem omittir ambos; e suppor por agora, como Axioma, o que dissemos no fim da ditta Nota.

§. I.

Explica-se, e demonstra-se o Principio de Euclides das *Equi-multiplices.*

Lemma I.

Fig. 5. *Seja A para B, como C para D: e tomem-se dos antecedentes A,C, quaesquer Equi-multiplices E,F, v.g. 2. duplas; e dos consequentes B,D, outras quaesquer Equi-multiplices G,H, v.g. 2. triplas. Digo que tambem E he para G, como F para H.*

D*Em.* Porquanto A : B = C : D; tambem 2 A : B = 2 C : D. [Tomo este principio como Axioma, por ser evidente] logo E : B = F : D. Porem pela mesma razão, por

por ser E : B = F : D, serà tambem E : 3B = F : 3D; logo E : G = F : G. *Q.E. &c.*

Lemma II.

Se 2 quantidades A,B, tiverem huma medida commua C, serà A tomada tantas vezes, quantas C se inclue em B; igual a B, tomada tantas vezes, quantas o mesmo C se inclue em A.

DEm. Supponhamos que C se inclue 6 vezes em A, e 4 vezes em B. He evidente que considerada C como unidade, sera A o mesmo que 6; e B o mesmo que 4. Porèm 2 numeros, de qualquer modo que se multipliquem, sempre fazem o mesmo producto; isto he, 6 multiplicados por 4; ou 4 multiplicados por 6, sempre fazem os mesmos 24. Logo A, tomada 4 vezes, quantas C se inclue em B, he igual a B, tomada 6 vezes, quantas o mesmo C se inclue em A. *Q.E.&c.*

THEOREMA I.

Se a razão de A para B, for mayor que a de C para D; tantas equi-multiplices se poderão tomar dos antecedentes A,C; e tantas dos consequentes B,D, que excedendo a multipla do antecedente A a multipla de seu consequente B, não exceda a multipla do antecedente C, a multipla de seu consequente D.

DEm. Porquanto a razão de A para B, he mayor que a de C para D, serà A—X [isto he A menos alguma parte, o que noto assim A—] para B, como C para

C para D [Tomo tambem este principio por Axioma, por ser manifesto] Supponhamos agora que esta tal parte X se inclue 4 vezes em A— : e divida-se A— em taes partes aliquotas, que huma dellas [v.g. huma settima O] se inclua mais vezes em B [v.g. 5.] do que X se inclue em A— : e seja o residuo Z.

Porquanto O he medida commua de A— , e de B— , e se inclue 7 vezes na primeira, e 5 na segunda (*Hyp.*) serà A— , tomada 5 vezes, igual à B— , tomada 7 (*Lem.* 2.) porèm a particula Z, tomada tambem 7 vezes, he menor que a particula X, tomada 5 [por ser 5 X mayor que A— (*Hyp.*) isto he mayor que 7 O (*Hyp.*) isto he muito mayor que 7 Z; por ser Z menor que O] logo ajuntando estas duas quantidades desiguaes às outras 2 iguaes; isto he, ajuntando 5 X à 5 A—, e 7 Z à 7 B— ; serà toda a A, tomada 5 vezes, mayor que toda à B, tomada 7.

Porèm C, tomada 5 vezes, he menor que D, tomada 7 [Porquanto, pelo discurso arriba, 5. A— são iguaes a 7 B— ; e por consequencia menores que 7 B : porèm sendo A— : B = C : D (*Hyp.*) tambem 5 A— : 7 B = 5 C : 7 D (*Lem.* 1.) logo sendo 5 A— menores que 7 B , tambem 5 C serão menores que 7 D] logo, sendo a razão de A para B, mayor que a de C para D, tantas equi-multiplices se pòdem tomar dos antecedentes A, C; e tantas dos consequentes B, D; que excedendo a multipla do antecedente A a multipla do seu consequente B, não exceda a multipla do antecedente C a multipla do seu consequente D. *Q.E.* &c.

THEO-

THEOREMA 2.

Se quaesquer equi-multiplices dos antecedentes A,C, forem sempre, ou juntamente mayores, ou juntamente menores, ou juntamente iguaes, a quaesquer equi-multiplices dos consequentes B,D; as razões de A para B, e de C para D, serão iguaes. Fig. 1.

D*Em.* Se o não são: seja v.g. a de A para B maior: logo tantas equi-multiplices se poderão tomar dos antecedentes, e consequentes de huma, e outra, que excedendo a multipla do ant. A a multipla do consequente B, não exceda a multipla do ant. C a multipla do cons. C (*Theor. ant.*): porem isto destroe a hyp. logo &c.

THEOREMA 3.

Se tanto dos antecedentes A,C, como dos consequentes B,D, se poderem tomar taes equi-multiplices, que excedendo a multipla do ant. A a multipla do seu cons. B, não exceda a multipla do ant. C a multipla do seu cons. D; será a razão de A para B, maior que a de C para D. * He conversa da 1. Fig. 1.

D*Em.* Primeiramente a razão de A para B, não he igual â de C para D; como se infere do Lem. 1. Tambem não he menor; porque a sello, sempre as equi-multiplices de A terião menor razão para as equi-multiplices de B, q̃ as equi-multiplices de C para as equi-multiplices de D; como se infere claramente do mesmo Lem. e por conseq. nunca podia succeder, que excedendo a multipla de A a multipla de B, não excedesse tambem a multipla de C a multipla de D (*contra a hyp.*) logo necessariamente hade ser maior. *Q. E. &c.*

THEOREMA 4.

Quando as razões ſemelhantes ſão Irracionaes, nunca pode ſucceder, que as multiplas dos antecedentes ſejão iguaes âs multiplas dos conſequentes: porem ſempre lhes fica a outra propriedade indefectivel do ſimultaneo exceſſo, ou defeito das equi-multiplices, demonſtrado no Theor. 2.

D*Em*. Seja a razão de A para B, irracional. Se a multipla de A podeſſe ſer alguma vez igual â multipla de B; tanto huma, como outra ſerião iguaes a huma terceira Z: porem tanto A, como B, como partes aliquotas da ditta terceira, ſão commenſuraveis com ella; logo ſerião commenſuraveis entre ſi, contra a hyp.

Não obſtante eſta impoſſibilidade, como o Theor. 2. he univerſal, ſempre fica por diſtinctivo infallivel de todas as razões ſemelhantes, aquella ſimultanea correſpondencia, de ſerem as equi-multiplices dos antecedentes à reſpeito das equi-multiplices dos conſequentes, ou ſempre maiores, ou ſempre menores, e ſomente para as racionaes o poderem ſer juntamente iguaes. * Deſembaraçado aſſim o Principio de *Euclides*, por veneração de tam grande Geometra, paſſemos ao dos Modernos.

§. II.

§. II.

Explica-se, e demonstra-se o Principio dos Modernos das Equi-aliquotas.

THEOREMA 5.

Se os consequentes B, D, ou quasquer aliquotas semelhantes dos mesmos consequentes (v.g. decimas, centesimas, millesimas, &c.) se incluirem sempre em igual numero nos seus antecedentes A, C: as razões de A para B, e de C para D, serão iguaes. Fig. 9.

DEm. Se não o são; seja v.g. a de A para B maior; e por consequencia seja A—X (isto he, A menos alguma parte) para B, como C para D. He evidente, que o consequente B se pode considerar dividido em aliquotas tam pequenas, que huma dellas N seja menor que X: seja pois N huma decima de B; a qual tirada do ant. A, quantas vezes poder ser (v.g. 15.) deixe Y menor que N: serà A— Y : B= 15 : 10.

Divida-se agora o consequente D em 10. partes iguaes; e tire-se humas dellas O do ant. C, quantas vezes poder ser he sem duvida, que ou sobeje, ou não: alguma particula (isto he, ou Z seja alguma couza, ou não) sempre C— Z hade incluir tantas vezes a decima de D, quantas A—Y a decima de B (*Hyp.*) logo tambem serà C— Z : D= 15 : 10; e por conseq. A— Y : B= C— Z : D.

Porem A— Y he maior que A— X [por ser X maior que N (*Hyp.*) e N maior que Y] logo maior razão terà A— Y para B, que A— X para o mesmo B; isto he, que C para D (*Hyp.*) e sendo Z alguma couza, muito maior que C— Z para o mesmo D; contra o demonstrado.

THEOREMA 4.

Fig. 10. *Se os conſequentes B, D; ou quaſquer aliquotas ſemelhantes dos meſmos conſequentes (v.g. N, O) ſe incluirem deſigualmente em ſeus antecedentes A, C; as razões ſerão deſiguaes: e aquella ſerà maior, cujo ant. incluir mais aliquotas do ſeu conſeq.*

D*Em* Inclua-ſe a aliquota N, decima de B, 20 vezes em A; e inclua-ſe a aliquota O, decima de D, 18 vezes em C: e ſeja o reſiduo X do primeiro ant. menor que N, e o reſiduo Y do ſegundo ant. menor que O.

Accreſcente-ſe ao ſegundo antecedente a parte Z, de ſórte que C+Z inclua 20 vezes a aliquota O. Porquanto A—X contém 20 vezes a decima de B: e C+Z contém 20 vezes a decima de D; ſerà A—X : B = C+Z : D : logo accreſcentando X ao primeiro antecedente, mayor razão terà A para B, que C+Z para D: e tirando Z ao ſegundo, muito mayor que C para D. *Q.E.&c.* * Não demonſtro as Converſas deſtas duas Propoſições, por ſerem evidentes.

CONCLUSÃO.

EStabelecidos eſtes dous Principios, ſegue-ſe que em qualquer delles que ſe proceda, ſempre ficão firmes as demonſtrações do 5. e 6. livro: porém como o ſegundo he mais claro, e mais expedito, que o primeiro, deſte nos ſerviremos, não ſómente nas dittas demonſtrações; ſenão em todas aquellas, que pelo diſcurſo da Geometria dependerem de Proporções.

PROPO-

PROPOSIÇÕES.

Consta este livro de 25. Proposições; das quaes 10. não tem mais uso, que para demonstrar as outras 15. pelo methodo das Equi-multiplices: porèm como o que havemos de seguir he differente, não demonstrarey mais que aquellas 15. conservando comtudo a numeração de Euclides, *por evitar confusão nas citações. A estas 15. e em lugar das 10. que se omittem, ajuntarey outras 10. de* Pappo; *as quaes pela grande connexão, que tem com as de* Euclides, *ha muito que estão na posse de compôr com ellas hum mesmo livro.*

Advirta-se, que aindaque as Proposições deste livro se explicão por linhas, a sua força he mais universal; porque, como disse no Prologo, se estende a todas aquellas couzas, que tem connexão com a Quantidade, como são Motos, Velocidades, Pezos, &c.

AXIOMA.

Dadas 3. quantidades A,B,C, pode-se dar outra quarta X, para a qual tenha a terceira a mesma razão, que tem a primeira para a segunda.

PROPOSIÇÃO I. II. III. IV. V. e VI.

São superfluas no nosso methodo.

PRO-

PROPOSIÇÃO VII.

Fig.11. *Se as quantidades A, B, forem iguaes; e se der outra terceira Z: serà A para Z, como B para o mesmo Z: e serà Z para A, como o mesmo Z para B.*

Tanto esta, como as quatro seguintes Proposições são puros Axiomas; e não necessitão de demonstração.

PROPOSIÇÃO VIII.

Fig.12. *Se as quantidades A, B, forem desiguaes; e se der outra terceira Z: serâ a menor A para Z em menor razão, que a mayor B para o mesmo Z: e serà Z para a menor A em mayor razão, que o mesmo Z para a mayor B.*

COnsta manifestamente da Definição 3. Porquanto como a razão não he outra couza mais que o respeito de huma quantidade para outra, segundo a inclusão; claro estâ, que comparando-se v.g. 4. e 6. com 2; assim como 4. contem menos vezes 2. do que 6; assim 2. he menos vezes incluido em 4. que em 6; e por consequencia ao mesmo passo que 4. representa ser menor que 6. a respeito de 2; assim 2. representa ser mayor a respeito de 4. que a respeito de 6.

PRO-

PROPOSIÇÃO IX.

Se as quantidades A, B, tiverem para huma terceira Z a mesma razão; serão iguaes entre si * He puro Axioma. Fig. 12.

PROPOSIÇÃO X.

Se a quantidade B tiver mayor razão para Z, que A tem para o mesmo Z; será B mayor que A. E se Z tiver mayor razão para A, que para B; será A menor que B. Fig. 12.
* Consta da 8.

PROPOSIÇÃO XI.

Se 2. razões forem iguaes, ou semelhantes a huma terceira razão; serão iguaes, ou semelhantes entre si. Fig. 12.

SEja A : B = X : Z; e seja C : D = X : Z. Digo que A : B = C : D. * He puro Axioma, e corresponde ao 1. do livro 1.

PROPOSIÇÃO XII.

Fig. 14. *Se quaesquer quantidades A,C,E, tiverem a mesma razão para outras tantas quantidades B,D,F (cada huma â sua) aquella mesma razão, que tiver qualquer dellas para a sua correspondente (v. g. A para B) essa mesma terão todas as primeiras juntas A+C+E, para todas as segundas juntas B+D+F.*

DEm. Dividão-se os antecedentes A,C,E, em quaesquer aliquotas semelhantes. Porquanto as razões propostas são *iguaes*, e as *mesmas*, tantas aliquotas do primeiro ant. A, se incluirão no seu conseq. B, quantas dos outros antecedentes C, E, nos seus consequentes D, F (*he conversa do Theor.* 5.) Logo ajuntando todas as dos antecedentes, e todas as dos consequentes de 3. em 3. (isto he, huma de cada hum) e formando novas aliquotas, tantos ternos se acharão nos antecedentes, e consequentes juntos, quantas aliquotas nos separados. Logo assim como qualquer ant. he para o seu conseq. separado; assim serão todos juntos para todos juntos (*Theor.* 5.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XIII. e XIV.

São superfluas neste methodo

PROPO-

PROPOSIÇÃO XV.

As aliquotas ſemelhantes B, D, tem entre ſi a mesma razão, que os ſeus todos A, C. O meſmo digo das aliquantas ſemelhantes; ou ſejão racionaes, ou não. Podera-ſe tomar como Axioma; porem convêm demonſtralla, por ſer fundamental.* Fig. 15.

DEm. 1. part. As aliquotas ſemelhantes B, D, incluem-ſe nos ſeus todos igualmente, e preciſamente (*Def.* 7.) porèm cada huma das aliquotas de A, he para cada huma das aliquotas de C, como B para D; por ſerem todas reſpectivamente iguaes: logo A [iſto he, todas as aliquotas juntas do primeiro ant.] ſerà para C [iſto he, para todas as aliquotas juntas do 2.] como B para D (12.) *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

A Meſma razão, que tem B para D, tem tambem 2 B para 2 D, e 3 B para 3 D, &c.

2. Part. As aliquantas racionaes ſemelhantes A, C, dos todos G, H, uſão de medidas communas ſemelhantes B, D; as quaes ſe incluem igualmente, e preciſamente nas partes, e nos todos reſpectivamente (*Def.* 7.) logo ſerà A : C = B : D; e ſerà tambem G : H = B : D (1. *Part.*) Logo (*pela* 11.) ſerà A : C = G : H. *Q. E. &c.* Fig. 5.

3. Part. Se ſendo A para B (aliquanta irracional) como C para D (aliquanta ſemelhante) não for A para C, como B para D: ſeja A—X : C = B : D. Iſto ſupposto: por ſerem as partes ſemelhantes proporcionaes aos todos, dividida B em quaeſquer aliquotas, das quaes huma N ſeja menor que X; e dividida D em Fig. 9.

ſemelhantes aliquotas; tantas das primeiras ſe incluiráo em A, quantas das ſegundas em C (*Theor.* 5.) Componháo pois as primeiras A—Y, e as ſegundas C—Z [porque ſendo as quantidades irracionaes, não pode ſer preciſa a incluſão (*Theor.* 4.] logo A—Y : C—Z = B : D (1. *Part.*) porèm A—Y he mayor que A—X (por ſer Y menor que N; e N menor que X) logo A—X terà menor razão para C—Z, que B para D (8.) e por conſequencia muito menor para todo o C, que B para D; contra o ſuppoſto.

PROPOSIÇÃO XVI.

Fig. 15. *Se a primeira A for para a ſegunda B, como a terceira C para a quarta D; ſerà permutando, ou alternando* (Def. 12.) *a primeira A para a terceira C, como a ſegunda B para a quarta D.*

D*Em.* Supponhamos, que B, D, ſão menores que A, C (porque ſendo iguaes, não tem lugar a demonſtração) Porquanto A he mayor que B, e C mayor que D, ſeráo B, D, partes ſemelhantes de A, C, (*Def.* 1.) logo ſerà A : C = B : D (*Ant.*) *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

S*E A for para B, como C para D; ſerà invertendo* (Def. 13.) *B : A = D : C.* * He puro Axioma. No texto de *Euclides* eſte he o Corollario da 4.

PRO-

PROPOSIÇÃO XVII.

Se o antecedente A+B for para o consequente B como o antecedente C+D para o consequente D; serà dividindo (Def. 15.) *A, excesso do primeiro antecedente sobre o seu consequente para o mesmo consequente B; como C, excesso do segundo antecedente sobre o seu consequente, para o mesmo consequente D.*

DEm. Porquanto A+B : B=C+D : D, divididos os consequentes B, D, em quaesquer aliquotas semelhantes, sempre ellas se incluirão em igual numero nos seus antecedentes A+B, C+D (*Theor.* 5.) logo tirando iguaes numeros de aliquotas semelhantes de hum, e outro antecedente [isto he, tirando B de A+B, e D de C+D] ainda ficarão com iguaes numeros de aliquotas os residuos A, C: logo serà A : B= C : D (*Theor.* 5.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XVIII. Fig. 16

Se o antecedente A for para o consequente B, como o antecedente C para o consequente D; serà compondo (Def. 14.) *A+B: B=C+D : D.*

DEm. Porquanto A : B=C : D; devididos os consequentes B, D, em quaesquer aliquotas semelhantes, sempre estas se incluirão em igual numero nos seus antecedentes A, C (*Theor.* 5.) logo accrescentando iguaes numeros de aliquotas semelhantes a ambos os antecedentes (isto he, accrescentando B à A, e D à C) ainda continuarão a ter iguaes numeros de seme-

ſemelhantes aliquotas as compoſtas A+B, C+D: logo pelo meſmo *Theor.* ſerà A+B : B=C+D : D. *Q. E. &c.*

COROLLARIOS.

1. SE for A+B : B=C+D : D; tambem mulctados os antecedentes dos ſeus conſequentes, ſerão os meſmos antecedentes para os reſiduos proporcionaes; iſto he, ſerà A+B : A=C+D : C.

Dem. Porquanto A+B : B=C+D : D; ſerà dividindo, A : B=C : D (17.) e invertendo, B : A=D : C (*Eſch. da* 10.) logo compondo, ſerà B+A : A=D+C : C (*Ant.*) iſto he, ſerà A+B : A=C+D : C. *Q. E. &c.* * Eſte modo de argumentar chamà-ſe *Converſão da razão* (*Def.* 16.)

2. Se for A : A+B = C : C+D; tambem mulctados os conſequentes dos ſeus antecedentes, ſerão os meſmos antecedentes para os reſiduos proporcionaes; iſto he, ſerà A : B = C : D. E compondo os ditos antecedentes com os meſmos reſiduos, e comparando-os com elles meſmos, ſerà A+B : B = C+D : D.

Dem. Porquanto A : A+B = C : C+D; ſerà invertendo, A+B : A=C+D : C. (*Eſch. da* 16.) *logo dividindo*, ſerà B : A=D : C (17.) e ſegunda vez invertendo, ſerà A : B=C : D. *Que era o primeiro* : e compondo, ſerà A+B : B=C+D : D (18.) *Que era o ſegundo.*

PROPO-

PROPOSIÇÃO XIX.

Se o todo A+B for para o todo C+D, como a parte B para a parte D; será tambem o todo para o todo, como a outra parte A para a outra parte C. Fig. 16.

DEm. Porquanto A+B : C+D = B : D; será permutando, A+B : B = C+D : D (16.) logo por conversão de razão, será A+B : A = C+D : C. (*Cor.* 1. *da ant.*) e segunda vez permutando, será A+B : C+D = A : C. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XX. e XXI.

São superfluas neste methodo.

PROPOSIÇÃO XXII.

Se em 2 series de quantidades A,B,C,D,&c. E,F,G,H,&c. for a primeira A para a segunda B, como a primeira E para a segunda F: e a segunda B para a terceira C, como a segunda F para a terceira G; e assim por diante (comparando sempre as razões de huma serie com as razões da outra) será por igual (Def. 17.) *a primeira A para a ultima D da primeira serie, como a primeira E para a ultima H da segunda.* Fig. 18.

DEm. Porquanto A : B = E : F, será alternando, A : E = B : F (16.) E porquanto B : C = F : G, será tambem alternando, B : F = C : G. Logo (*pela* 11.)

11.) ferà A : E = C : G; e outra vez alternando, ferà A : C = E : G. Do mefmo modo moftrarey fer A : D = E : H. Logo &c.

PROPOSIÇÃO XXIII.

Fig. 19. *Se em duas feries de quantidades for a primeira A para a fegunda B, como a primeira D para a fegunda E; e a fegunda B para a terceira C, como a terceira F para a primeira D: ferà por razão perturbada* (Def. 17.) *a primeira A para a terceira C, como a terceira F para a fegunda E.*

D*Em.* Faça-fe como B para C, affim E para outra G. Porquanto B : C = F : D (*Hyp.*) e B : C = E : G (*Conftr.*) ferà F : D = E : G (11.) logo permutando, ferá F : E = D : G (16.) Porèm D : G = A : C (*Ant.*) logo tambem F : E = A : C (11.) *Q.E.&c.*

ESCHOLIO.

E*Sta Propofição he univerfal, de qualquer modo que fe perturbe a fegunda ferie; com tanto que fe ajuntem nella as mefmas razões da primeira; e fe compare o primeiro termo com o ultimo. Veja-fe o exemplo feguinte, em que a ordem natural das letras indica a perturbação das razões; e note-fe bem efta Propofição para quãdo fe houverem de compôr quaefquer razões como diremos abaixo no Appendiz 1. §. 12.*

A : B : C :

A :	B :	C :	D :	E :	F
2 :	4 :	1 :	3 :	6 :	9
R :	O :	M :	N :	P :	Q
16 :	24 :	6 :	12 :	36 :	72.

PROPOSIÇÃO XXIV.

Se A for para C, como D para F; e B para o mesmo C, como E para o memso F: serà a composta A+B para C, como a composta D+E para F. Fig. 17.

DEm. Porquanto B : C=E : F, serà invertendo, C : B=F : E (*Esch. da* 16.) logo temos duas series de quantidades proporcionaes A, C, B : D, F, E : logo por igual, serà A : B=D : E (22.) e compondo, serà A+B : B = D+E : E (18.) Porèm B : C=E : F (*Hyp.*) logo segunda vez por igual, serà A+B : C =D+E : F. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XXV.

Se forem 4. quantidades proporcionaes A+B : C+D=E : F; serà a mayor de todas A+B juntamente com a menor F, mayor que as duas intermedias C+D, E. Fig. 24.

DEm. Porquanto A+B : C+D=E : F, tirando da primeira A+B huma parte A=E; e da segunda C+D outra parte C=F, serà A+B : C+D = A : C, e [*pela* 19.] A+B : C+D = B : D. Porèm A+B he mayor que C+D (*Hyp.*) logo tambem B he mayor que D. Porèm sendo [*pela Constr.*] A= E; e C=F,

e C=F, he A+F = C+E : logo, se se accrescentarem a estas summas iguaes as duas desiguaes B, D; isto he, se se accrescentar à A+F a mayor B, e a C+E a menor D, ficarà a composta A+F+B mayor, que a outra composta C+E+D; isto he, serà A+B com F, mayor que C+D com E. *Q. E. &c.*

NOTA.

Jà disse que as 10. *Proposições seguintes não são de* Euclides, *senão de* Pappo Alexandrino: *porèm pela connexão, que tem com as antecedentes, fazem com ellas hum mesmo livro; e continuão a mesma numeração.*

PROPOSIÇÃO XXVI.

Fig. 21. *Se a primeira A tiver maior razão para a segunda B, que a terceira C para a quarta D; terà, invertendo, a segunda B menor razão para a primeira A, que a quarta D para a terceira C.*

D*Em.* Porquanto A tem maior razão para B, que C para D; serà A : B+X = C : D (10.) logo invertendo, serà B+X : A = D : C (*Esch. de* 16.) e por consequencia terà B para A menor razão, que D para C (8.) *Q. E. &c.*

PRO-

PROPOSIÇÃO XXVII.

Se A tiver maior razão para B, que C para D; tambem permutando, terà A para C maior razão, que B para D.

DEm. Por quanto A tem maior razão para B, que C para D; ferà $A : B+X = C : D$ (10.) logo permutando, fera $A ; C = B+X : D$ (16.) Porem $B+X$ tem maior razão para D, que B para o mefmo D (8.) logo tambem A terà maior razão para C, que B para D. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXVIII

Se A tiver maior razão para B, que C para D; tambem compondo, terà A+B para B maior razão, que C+D para D. Fig. 22.

DEm. Porquanto A tem maior razão para B, que C para D; ferà $A-X : B = C : D$ (10.) logo compondo, ferà $A-X+B : B = C+D : D$ (18.) logo accrefcentando X à primeira, ferà A+B para B em maior razão, que C+D para D (8.) *Q.E.&c.* * A demonftração fempre he a mefma; ou a primeira razão feja de maior, ou de menor defigualdade.

PROPOSIÇÃO XXIX.

Se A+B para B tiver maior razão, que C+D para D; tambem dividindo, terà A para B maior razão, que C para D.

DEm. Por quanto A+B para B tem maior razão, que C+D para D; serà A—X+B : B=C+D : D (10.) logo dividindo, serà A—X : B=C : D (17.) logo accrescentando X ao primeiro antecedente, serà A para B em maior razão, que C para D (8.) *Q. E &c.*

PROPOSIÇÃO XXX.

Se A+B para B tiver maior razão, que C+D para D; terâ convertendo, A+B para A menor razão, que C+D para C.

DEm. Por quanto A+B para B tem maior razão, que C+D para D; tambem dividindo, terà A para B maior razão, que C para D (29.) logo invertendo, terà B para A menor rezão, que D para C (26.) logo compondo, terà tambem B+A para A menor razão, que D+C para C (28.) *Q.E &c.*

PROPOSIÇÃO XXXI.

Fig.23. *Se A para B tiver maior razão, que D para E: e B para C tambem maior razão, que E para F (e assim por diante) tambem por igual, terà A para C maior razão, que D para F.*

DEm. Porquanto A para B tem maior razão, que D para E, serà A—X : B=D : E (10.) e por quanto B para C tambem tem maior razão, que E para F, serà B : C+Z=E : F (10.) logo por igual serà A—X : C+Z=D : F (22.) logo accrescentando X ao primeiro antecedente, sera A para C+Z em maior razão, que D para F (8.) e tirando Z ao primeiro consee quent-

quente, ferà A para C em muito maior razão, que D para F. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXXII.

Se A para B tiver maior razão, que E para F; e B para C tambem maior razão, que D para E; tambem por igual (em razão perturbada) terà A para C maior razão, que D para F. Fig. 24.

A *Dem.* he a mefma que a antecedente; e fomente fe allega a 23. em lugar da 22.

PROPOSIÇÃO XXXIII.

Se a toda A+B for para a toda C+D em maior razão, que a parte B para a parte D; ferá a mefma toda para a outra toda em menor, que a parte remanente A para a outra parte remanente C. Fig. 20.

D*Em.* Por quanto A+B he para C+D em maior que B para D: ferà permutando, A+B para B em maior rezão, que C+D para D (27.) logo convertendo, ferà A+B para A em menor razão, que C+D para C (30.) logo fegunda vez permutando, ferâ A+B para C+D em menor razão, que A para C (colhe-fe da mefma 27.) *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXXIV.

Fig. 24. *Se as razões A para C, e D para F, forem duplicadas de iguaes razões A para B, e D para E; ferão iguaes entre fi. O mefmo digo fe forem triplicadas, ou quadruplicadas, &c.*

DEm. Porquanto A para C he em duplicada razão de A para B; ferà A : B = B : C (*Def.* 10.) e pela mefma razão ferà D : E = E : F. Porem pela *Hypoth.*. A : B = D : E; e pela 11. B : C = E : F (por fer B : C = A : B; ifto he, = D : E; ifto he, = E : F) logo por igual ferà A : C = D : F (22.) *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXXV.

Fig. 24. *Se as razões iguaes A para C, e D para F, forem duplicadas das razões A para B, e D para E; tambem eftas ferão iguaes entre fi.* * He converfa da antecedente.

DEm. Se não o são, feja A : B = D : X; e D : X = X : Z. Porquanto de iguaes razões A para B, e D para X, são duplicadas as razões de A para C, e D para Z; ferà D : Z = A : C (*Ant.*) ifto he, = D : F (*Hyp.*) logo Z = F (9.) e por confequencia X = E. Logo D : X (ifto he,) E = A : B. *Q.E.&c.*

APPEN-



APPENDIZ I.

DOS DENOMINADORES, Algariſmo, e Composição das Proporções.

§. I.

DA DIVISÃO DAS PROPORÇÕES.



IVIDESE a Proporção (como ſe diſſe na *Def.* 4.) em *Racional*, e *Irracional*. A *Racional* ſe divide em Razão de Igualdade, e de Deſigualdade; e eſta em Razão de maior deſigualdade, quando o antecedente he maior que o conſequente; e de menor deſigualdade, quando o antecedente he menor &c.

A Proporção Racional de maior deſigualdade ſe divide em 5. eſpecies; a ſaber *Multiplice*, *Super-particular*, *Super-parciente*, *Multiplice Super-particular*, e *Multiplice Super-parciente*.

A Multiplice: he quando o antecedente contem preciſamente o conſequente algumas vezes; como duas, tres, quatro &c. e então ſe diz ſer a razão *Dupla*, *Tripla*, *Quadrupla*, *&c.*

A Super-particular: he quando o antecedente contem

tem o consequente huma só vez, e mais alguma das suas partes aliquotas; como huma metade, terça, quarta, &c. V. g. a razão de 3. para 2. em que o antecedente contem huma vez o consequente, e mais a sua metade, chama-se *Sesqui-altera*: a de 4. para 3. em que o antecedente contem huma vez o consequente, e mais huma terça, chama-se *Sesquit-ercia*, *&c.*

A Super-parciente: he quando o antecedente contem o consequente huma sò vez, e mais algumas aliquotas, as quaes juntas não fação outra. V. g. 8. para 5. em que o antecedente contem huma vez o consequente, e mais tres quintas: ou 13. para 10. em que o ant. contem huma vez o conseq. e mais tres decimas: &c.

A Multiplice Super-particular: he quando o antecedente contem algumas vezes o consequente, e mais alguma das suas aliquotas. V. g. 5. para 2: ou 9. para 4. &c.

A Multiplice Super-parciente: he quando o antecedente contem algumas vezes o consequente, e mais algumas das suas aliquotas, as quaes juntas não fação outra. V. g. 8. para 3: 15. para 4. &c.

§. II.

Do Denominador da Proporção Racional.

O *Denominador* da Proporção Racional: he aquelle, que distincta, e claramente exprime a razão, que tem hum numero para outro; isto he, o que comparado com a unidade exprime o modo, com que hum numero maior contem outro menor. V. g. o denominador da razão de 24. para 8. he 3: porque 3. se ha para 1. como 24. para 8.

Acha-

Acha-se facilmente o denominador de qualquer razão, partindo-se o numero maior pelo menor; porquanto o quociente he o denominador que se busca. A razão he, porque como diremos na Arithmetica, a razão, que tem o quociente para a unidade, he a mesma que tem qualquer numero, que se parte, para o seu partidor. V.g. deseje-se o denominador da razão de 50. para 6: parta-se o numero 50. por 6; e serà $8\frac{1}{3}$ (que he o quociente desta partição) o denominador daquella razão.

$\frac{24}{8}$:	$\frac{3}{1}$

§. III.

Do Denominador da Proporção Irracional.

A Nenhuma Proporçaõ Irracional, se for huma sô, se pode assignar denominador, como he manifesto; porèm se forem muitas, poder-se-lhes-ha assignar denominador, o qual exprima o modo, com que huma se ha para a outra, que he o seguinte. Reduzão-se as razões dadas a outras semelhantes, as quaes tenhão hum consequente commum: e a razão que tiver hum antecedente para outro, essa mesma terà huma razão para outra razão.

V.g. sejão as razões B para C, e E para F, irracionaes; e deseje-se saber a razão, que tem huma para outra. Façase como B para C, assim D para X; e como E para F, assim G para o mesmo X: digo que a razão de B para C, he para a razão de E para F, como D para G.

B : C. E : F
D . G
X

Dem.

DEm. Por quanto X nesta reducção se considera como unidade, farão os antecedentes D, G, as vezes de denominadores das razões propostas: logo pelo mesmo modo, com que cada hum se ha para a unidade, exprimirão o modo com que se hão entre si. Veja-se a Prop. 8. do l. 5.

.§ IV.

A X I O M A S.

1. As razões de A para *Z*, e de B para Z, as quaes tem hum consequente cômum, são entre si, como os seus antecedentes: isto he, a razão de A para *Z* he tanto maior, que a de *B* para Z, quanto A he maior que B: ou pelo contrario, &c. Consta do ditto.

A. B.
Z.

2. As razões de X para D, e de X para E, as quaes tem hum antecedente commum, são entre si em razão reciproca dos seus antecedentes: isto he, a razão de X para D he tanto maior, que a de X para E, quanto E he maior que D: ou pelo contrario &c. *Veja-se* a Prop. 8. &c.

	X	
D	.	E

3. Quaesquer razões racionaes tem entre si a mesma razão, que os seus denominadores. Sejão as razões dadas 3. para 9. e 12. para 4. cujos denominadores são $\frac{1}{3}$ e 3. (§. 2.) digo que a razão, que tem entre si aquellas duas razões, he a mesma, que a de $\frac{1}{3}$ para 3. Consta do Ax. 1.

3 : 9 .	12 : 4.
$\frac{1}{3}$	3.

§. V.

Da somma, e subtracção das razões racionaes.

A Somma se faz, ajuntando todos os denominadores de quaesquer razões dadas, e comparando-os com a unidade: a subtracção ao contrario, tirando o menor do maior, e comparando o residuo com a mesma unidade. V. g. sejão as razões dadas 15. para 3. e 12. para 4. cujos denominadores são 5. e 3: Digo que a soma destes denominadores (isto he 8.) comparada com a unidade, he a somma das dittas razões: e o residuo dos mesmos (isto he 2.) comparado com a mesma unidade, he o residuo da maior razão, subtrahida a menor. Consta do Ax. 1. e 3.

	15	: 3	*	5
	12	: 4	*	3
Somm.	8	: 1		
Subtr.	2	: 1		

§. VI.

Da somma, e subtracção das razões irracionaes.

REduzão-se as razões dadas a hum consequente commum; e será a somma dos antecedentes, comparada com o ditto consequente, a somma das dittas razões: e o residuo, o residuo das mesmas, &c.

§. VII.

Da multiplicação, e divisão das razões racionaes.

MUltipliquem-se os denominadores das razões dadas, e compare-se o producto com a unidade; serà este o producto das dittas razões. Parta-se hum denominador por outro, e compare-se o quociente com a mesma unidade; serà este o quociente da partição das mesmas razões. V. g. sejão as razões dadas 9. para 3. e 20. para 5. cujos denominadores são 3. e 4. Digo, que o producto das dittas razões he 12. e o quociente he $\frac{3}{4}$. comparado hum, e outro com a unidade.

9	: 3	*	3
20	: 5	*	4
Prod.		12	: 1
Quoc.		$\frac{3}{4}$	: 1

DEm. Consta manifestamente do Axioma 1. e 3. Porquanto a multiplicação de duas razões não he outra couza mais, que a repetida addição de qualquer dellas, regulada pelas unidades da outra; as quaes, huma vez que estejão reduzidas a denominadores, se manejão como numeros.

§. VIII.

Da multiplicação das razões irracionaes.

COntinuem-se as razões dadas, e compare-se o primeiro com o ultimo termo; serà este o producto das dittas razões. V. g. sejão as razões dadas A para B, e D para E. Faça-se como D para E, assim B para huma terceira X. Digo que A para X he o producto das dittas razões.

A	:	B	:	X
D	:	E		

Dem.

DEm. A razão de A para X resulta da multiplicação das duas razões A para B, e B para X (*como constarà despois do* §. 12.) porèm B para X he a mesma razão que D para E (*Constr.*) logo resulta da multiplicação das razões dadas &c.

* Advirta-se que as razões dadas se podem continuar de dous modos; ou subindo a debaixo para riba; ou baixando a de riba para baixo; e isto ou por razão ordenada, ou perturbada. Vejão-se as Proposições 22. e 23. do 5.

§. IX.

Da divisão das razões irracionaes.

ENtremetta-se entre a razão, que se quer partir, a razão por quem se hade partir, fazendo-se commum à ambas, ou o antecedente, ou o consequente da primeira razão; e serà a razão residua o quociente da partição. V. g. queira-se partir a razão de D para E, pela razão de A para B. Faça-se como A para B, assim D para X: serà X para E o quociente da partição. Ou tambem: faça-se como A para B assim X para E; serâ D para X o outro quociente.

D	:	X	:	E
A	:	B		

DEm. Pelo §. ant. a razão de D para E resulta da multiplicação das duas razões D para X, e X para E: logo se representar qualquer dellas a razão de A para B, serà a remanente o quociente da partição.

§. X.

Da compoſição das razões.

HUma razão ſe diz ſer compoſta de outras razões, quando os termos Homologos ſe multiplicão entre ſi, e ſe comparão os productos: ou tambem, quando ſe multiplicão os denominadores, e ſe compara o producto com a unidade.* Eſta he a 5. Definição do livro 6. de que fallàmos ao principio deſte livro Def. ult.

Dem-ſe as razões 12. para 4. e 15. para 3. cujos denominadores ſão 3. e 5. Digo que ou ſe multipliquem os termos Homologos das dittas razões (iſto he o antecedente com o antecedente, e o conſequente com o conſequente) e ſe comparem os product. 180. com 12. entre ſi: ou ſe multipliquem os denominadores, e ſe compare o producto 15. com a unidade, ſempre ſe terà huma meſma razão, a qual ſe diz compoſta daquellas duas.

12 : 4 * 3
15 : 3 * 5
Compoſição
180 : 12 * 15 : 1.

§. XI.

A compoſição das razões não he outra couza mais, que a multiplicação das meſmas razões.

DEm. Conſta do §. 7. que a razão que reſulta da multiplicação de quaeſquer razões, he aquella que reſulta da multiplicação dos ſeus denominadores, comparado o producto com a unidade: porèm (*pela Def. do l. 6. citada*) a razão que reſulta da ditta multiplicação ſe diz *Compoſta* das meſmas razões: logo a compoſição, e a multiplicação coincidem.

Lemma.

Lemma.

Achar o denominador do producto de duas razões.

ASsim como a multiplicação de dous numeros não he outra couza mais, que achar hum terceiro, para o qual seja qualquer dos dados, como a unidade para o outro: assim tambem a multiplicação de duas razões não he outra couza mais, que achar huma terceira razão, para a qual seja qualquer das dadas, como a unidade para a outra. E como quaesquer razões [sejão racionaes, ou não] reduzidas a hum consequente commum são entre si como os seus antecedentes (*Ax.* 1.) segue-se que para se achar facilmente esta terceira razão, não ha mais que reduzir as razões dadas a hum consequente cõmum [o qual necessariamente tem as vezes de unidade] e fazer que este tal consequente seja para qualquer dos antecedentes, como o outro para hum quarto: porquanto este quarto, comparado com o mesmo consequente commum, exprimirà a razão que se busca.

§. XII.

Dadas quaesquer quantidades, ou numeros, a razão do primeiro termo para o ultimo he composta de todas as razões intermedias.

ESte celebre Theorema he tam difficil de demonstrar, que alguns insignes Geometras, o tomarão por Primeiro Principio; certificados da sua verdade, e desesperados de lhe achar demonstração: sómente em numeros o demonstrou *Theon*, *Eutocio*, e *Vite-*

e *Vitelio*: porèm o Padre *Tacquet*, fundado no *Lemma ant.* não achou difficuldade em demonſtrallo em numeros, e em quantidades, pela maneira ſeguinte.

Demonſtra-ſe em quantidades.

SEjão dadas quaeſquer quantidades A, B, C, D. &c. deve-ſe demonſtrar, que a razão de A para D, he compoſta das razões intermedias A para B, B para C, e C para D. Diſponhão-ſe as duas primeiras razões, como moſtra a figura; e para que tenhão ambas hum conſequente commum, que ſirva de unidade, faça-ſe como C para B, aſſim B para hum quarto E. He ſem duvida, que ſe pelo *Lemma ant.* ſe buſcar o producto deſtas duas razões fazendo-ſe como B para E, aſſim A para hum quarto M; ſerà M para B o denominador do ditto producto; ou a razão compoſta das dittas duas razões (ſegundo o que fica ditto no §. 11.) Porèm por ſer invertendo, M para A, como E para B; iſto he, como B para C (*Conſtr.*) he alternando, M para B, como A para C: logo a razão compoſta das duas primeiras razões, he como a primeira quantidade para a terceira. Do meſmo modo ſe demonſtra ſer a razão compoſta de todas tres, como A para D; e aſſim de outras muitas: logo &c.

Fig. 25.

A :	B :	C :	D.	&c
A.	B.	E *	M.	M
B	C	B *	A.	B.

Demonſtra-ſe em numeros.

SEjão dados os numeros 8. 6. 4. 2. &c. Diſponhão-ſe da meſma ſorte as duas primeiras razões 8. para 6. e 6. para 4: e para que tambem tenhão hum conſequente commum, faça-ſe como 4. para

8 :	6 :	4 :	2.	&c.
8.	6.	9 *	12.	12.
6.	4.	6 *	8.	6.

ra 6. assim 6. para 9. Multipliquem-se, ou componhão-se pelo *Lemma ant.* estas duas razões; e faça-se como 6. para 9 assim 8. para 12. Digo que tambem 12. he para 6. [isto he, o producto das duas razões comparado com o consequente commum, o qual faz as vezes de unidade] como 8. para 4. isto he, como o primeiro numero para o terceiro.

A demonstração he a mesma: porquanto invertendo, 12. he para 8. como 9. para 6. isto he, como 6. para 4. (*Constr.*) logo alternando, serà 12. para 6. como 8. para 4. *Q.E.&c.*

ESCHOLIO.

Mais facilmente, e sem recorrer áquelle Lemma, se pode demonstrar o mesmo Theorema nesta forma. Porquanto 8. *e* 6. *são antecedentes; e* 6. *e* 4. *consequentes; comparado o producto dos primeiros com o producto dos segundos, darse-ha huma razão composta das duas razões* (§. 10.) *porem (por ser o quociente o mesmo)* 6. *vezes* 8. *he para* 6. *vezes* 4. *como* 8. *para* 4. *logo &c. Do mesmo modo se demonstra nas quantidades, como constarà da primeira do seguinte livro.*

8.	6 *	48
..	..	
6.	4 *	24.

§. XIII.

A razão composta de quaesquer razões não he o mesmo que a somma dellas.

Consta manifestamente dos §§. 5. 6. e 12. Porquanto a somma de quaesquer razões se acha ajuntando os denominadores; e a composição multiplicando-os: logo não podem ser o mesmo, salvo no cazo, em que a somma equivalha â multiplicação, como no numero 2. o qual, ou multiplicado, ou somado consigo mesmo, sempre faz o mesmo 4.

ELEMEN-



ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA
LIVRO VI.

EXPOSTA ASSIM EM GERAL a doutrina das Proporções, passa Euclides *neste livro a applicalla aos Planos. E aindaque esta applicação era indifferente, porque, como temos ditto, a podera applicar a qualquer especie da Quantidade: comtudo pareceo ao Summo Geometra applicalla particularmente aos Planos; tanto para cabal intelligencia da materia, como para deixar de caminho estabelecidos os principios mais essenciaes, de que hade depender despois a doutrina dos Solidos.*

Todas as Proposições deste livro são tam engenhosas, como necessarias: razão porque não notarey nenhuma em particular; porque o admiravel he caracter de todas.

DEFINIÇÕES.

1 FIGURAS *Rectilineas Semelhantes*: são aquellas, que tem os angulos respectivamente iguaes; e os lados, que os comprehendem [ou sejão os que se

V oppoem,

oppoem, ou os que exiftem entre iguaes angulos) ordenadamente proporcionaes: ifto he, todos os antecedentes em huma figura, e todos os confequentes em
Fig. 31. 31. outra.* V.g. os Trapezios DB, HF, fão figuras femelhantes; porque além de terem iguaes os angulos correfpondentes; ifto he, D=H, C=G, B=F, e A=E: tem tambem os lados, que comprehendem os dittos angulos, ordenadamente proporcionaes; ifto he, DC: HG = CB: GF = BA: FE = AD: EH.

2. *Figuras Reciprocas, ou Reciprocamente proporcionaes*: fão aquellas que tem os lados conjunctos, ou os que comprehendem quaefquer angulos iguaes, arrevezadamente proporcionaes: ifto he, hum antecedente em huma figura, e outro antecedente em outra.* V.g. os Parallelogramos X, Z, fão reciprocos; porque
Fig. 26. tem os lados, que comprehendem os angulos iguaes em O, arrevezadamente proporcionaes; ifto he, AO: OB = CO: OD.

3. Huma recta fe diz eftar dividida em *Media*, e *Extrema Razão*: quando a toda he para huma parte,
Fig. 37. como effa mefma parte para a outra.* V.g. CB, eftâ cortada em A em *Media*, e *Extrema Razão*, quando CB: CA = CA: AB.

4. *A Altura de qualquer figura*: he a perpendicular tirada do vertice â bafe; eftendida efta quando feja
Fig. 2, 2. neceffario.* V.g. BX, he a altura do triangulo ABC: e PZ, a do triangulo OPQ.

5. *Razão compofta de outras razões*: he a que refulta da multiplicação dos termos homologos das dittas razões.* V.g. a razão compofta das duas razões A para B, e D para E, he AD para BE. Veja-fe o que differmos no §. 12. do Appendiz ant. aonde deixamos eftablecido, que fe fe fizer como D para E, affim B para huma terceira X; ferà A para X a razão compofta das dittas razões: e aquella mefma que refulta dos termos homolo-

A: B:	X
D: E	
AD: BE.	

homologos multiplicados, AD para BE.

6 *Arcos Semelhantes*: ſão os que tem para as ſuas circunferencias a meſma razão.

PROPOSIÇÃO I. *Theorema*

Os Triangulos ABC, OPQ, que tem a meſma altura PX, ou exiſtem entre as meſmas Parallelas; ſão entre ſi como as baſes AC, OQ. O meſmo digo dos Parallelogrammos DC, OR. Fig. I. I.

DEm. Divida-ſe a baſe de hum, OQ, em quaeſquer aliquotas OG, GH, &c. e tirem-ſe do vertice as rectas PG, PH, &c. Conſta da 38. do I. que todos aquelles triangulos parciaes OPG, GPH, &c. ſão iguaes entre ſi: e que tanto a baſe, como o triangulo total, eſtão divididos em ſemelhantes aliquotas. Tome-ſe agora da baſe do outro AC, a aliquota OG, quantas vezes puder ſer: iſto he, AE, EF, &c. e tirem-ſe do vertice as rectas BE, BF, &c. Tambem he ſem duvida, que todos aquelles triangulos parciaes ABE, EBF, &c. ſão iguaes entre ſi, e aos primeiros: e que tantas aliquotas da baſe OQ, contèm a baſe AC, quantas do triangulo OPQ, contèm o triangulo ABC. Porèm pelo meſmo diſcurſo, o que digo deſtas, ſe entende de quaeſquer outras: logo pelo *Theor. 5. do livro 5.* a baſe he para a baſe, como o triangulo para o triangulo. *Q. E. &c.*

Dos Parallelogrammos conſta manifeſtamente, por ſerem duplos dos triangulos (41. I.)

COROLLARIO.

Fig. 2, 2. OS triangulos ABC, OPQ, que tem a mesma, ou iguaes bases AC, OQ, são entre si como as alturas BX, PZ.

Dem. Tomem-se QX, ZE, iguaes à AC, OQ; e tirem-se as rectas BQ, PE. Se nos triangulos BXQ, PZE, se tomarem as rectas BX, PZ, por bases; e QX, ZE, por alturas; como estas são iguaes, serão os dittos triangulos como as bases (*Ant.*) porèm estes são respectivamente iguaes aos dados (38.1.) logo tambem aquelles serão entre si como as dittas bases; isto he, como as suas alturas BX, PZ. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO II. *Theor.*

Fig. 3. *Se dentro de hum triangulo QPO se tirar huma parallela AB a qualquer dos lados QO; cortarà esta proporcionalmente os outros dous lados PQ, PO: isto he, serà PA : AQ = PB : BO. E pelo contrario, se cortar os lados proporcionalmente, serà parallela ao terceiro.*

DEm. 1. part. Tirem-se as rectas AO, BQ. Porquanto os triangulos AQB, AOB tem a mesma base, e estão entre as mesmas parallelas, são iguaes entre si (37.1.) logo o triangulo APB tem para hum, e outro a mesma razão (7.5.) porém tem para o primeira a razão de PA para AQ; e para o segundo a razão de PB para BO (*Ant.*) logo PA : AQ = PB : BO (11.5.) *Q. E. &c.*

2. Part. PA : AQ = PBA : ABQ; e PB : BO = PAB : BAO (*Ant*) porém PA : AQ = PB : BO (*Hyp.*)

(*Hyp.*) logo PBA : ABQ = PAB : BAO (11.5.) Porem PBA, e PAB he o mesmo triangulo: logo os dous ABQ, BAO são iguaes entre si (9.5.) e por consequencia existem entre duas parallelas (39.1.) *Q.E.&c.*

COROLLARIO.

SE à qualquer lado OQ de hum triangulo se tirarem muitas parallelas AB, CD, EF; serão todos os segmentos dos outros dous lados PO, PQ, ordenadamente proporcionaes. Fig. 4.

Dem. Tire-se do ponto E a recta EX, parallela a PQ. As rectas EV, VX, são iguaes âs rectas FB, BQ (34.1.) porèm EA : AO = EV : VX (*Ant.*) logo tambem EA : AO = FB : BQ. Do mesmo provarey ser EC : CA = FD : DB; e ser PE : EC = PF : FD, &c. logo &c.

PROPOSIÇÃO III. *Theor.*

Se a recta BO cortar pelo meyo o angulo B de qualquer triangulo ABC; serão os segmentos da base AO, OC, na mesma proporção que os lados adherentes AB, BE. E se os ditos segmentos forem na mesma proporção, que os dittos lados; cortarà a recta BO o angulo B pelo meyo. Fig. 5.

DEm. 1. part. Continue-se o lado CB atè que BD seja igual a BA; e tire-se a recta DA. Porquanto o triangulo X, he isósceles, serão os angulos D, *u.* oppostos a iguaes lados, iguaes (5.1.) porem o angulo externo CBA he igual a estes dous internos (32.1.) logo a sua metade *e.* he igual a hum só D; e por consequencia as rectas BO, DA, são parallelas (29.1.) Logo no

go no triangulo DCA, AO he para OC, como BD (isto he AB) para BC (*Ant.*) *Q. E. &c.*

2. Part. Porquanto AO : OC = AB : BC (isto he) = DB : BC (*Constr.*) seráo as rectas DA, BO, parallelas (*Ant.*) logo o angulo externo *e.* he igual ao interno D (27.1.) e o interno *i.* a seu alterno *u.* Porèm pela igualdade dos lados DB, AB, os angulos D, *u.* sáo iguaes entre si (5.1.) logo tambem o seráo *i. e.* e por consequencia o angulo B, està dividido pelo meyo.

PROPOSIÇÃO IV. *Theor.*

Fig. 5, 6. *Os triangulos BCA, DCE, respectivamente equiangulos, tem tambem os lados respectivamente proporcionaes; e por consequencia são figuras semelhantes* (Def, 1.)

DEm. Colloque-se o segundo sobre o primeiro de sorte, que se fiquem correspondendo os angulos iguaes. Porquanto o externo D, he igual ao interno B, seráo as rectas DE, BA parallelas (29.1.) logo CD : DB = CE : EA (2.) e compondo, CD : CB = CE : CA (18.5.) Do mesmo modo mostrarey ser CE : CA = DE : BA [pondo o angulo D sobre o angulo A] logo &c.

COROLLARIO.

Fig. 7. 1. SE se tirar huma parallela CD, a qualquer lado BE de hum triangulo; serà o triangulo parcial CAD, semelhante ao total BAE; e por consequencia serà AC : AB = CD : BE.

2. Se no mesmo triangulo se tirar do angulo opposto âs dittas parallelas huma recta AX, as cortarà proporcionalmente. Porquanto por ser AO : AX = CO : BX; e juntamente = OD : XE; serà CO : BX = OD : XE

XE (11.5.) logo permutando, ſerà CO : OD = BX : XE (15.5.)

PROPOSIÇÃO V. *Theor.*

Se dous triangulos CBA, CDE, tiverem os lados reſpectivamente proporcionaes; ſerão reſpectivamente equiangulos: e por conſequencia ſemelhantes. Fig. 6. 6.

DEm. Sobre a baſe CE do ſegundo triangulo, imagine-ſe outro terceiro CQE, equiangulo ao primeiro; de ſorte que ſejão os angulos *o. u.* iguaes aos angulos C, A, &c. Porquanto CB : CD = CA : CE (*Hyp.*) ſerà permutando, CB : CA = CD : CE. E porquanto CB : CQ = CA : CE (*Ant.*) ſerà tambem permutando, CB : CA = CQ : CE. Logo CD : CE = CQ : CE (15.5.) e por conſequencia CD, CQ, ſão iguaes (7.5.) Do meſmo modo moſtrarey ſerem tambem iguaes ED, EQ: logo os triangulos CDE, CQE, ſão reſpectivamente equilateros, e equiangulos; e por conſequencia &c.

PROPOSIÇÃO VI.

Se dous triangulos BCA, DCE, tiverem os angulos C, C, iguaes, e os lados, que os comprehendem, reſpectivamente proporcionaes (iſto he, CB : CD = CA : CE) ſerão ſemelhantes. Fig. 6. 6.

DEm. Feita a meſma conſtrucção, moſtrarey com o meſmo diſcurſo, que os lados CD CQ, ſão iguaes: porem os angulos em C (*da 2. Figura*) tambem ſão iguaes [o de ſima pela *Hyp.* e o debaixo pela *Conſtr.*]

Conſtr.] e o lado CE commum: logo os triangulos DCE, QCE ſão reſpectivamente equilateros, e quiangulos (4.1.) e por conſequencia &c.

PROPOSIÇÃO VII.

He inutil.

PROPOSIÇÃO VIII. *Theor.*

Fig 1. *No triangulo rectangulo ECD, a perpendicular CO, tirada do angulo recto â baſe, forma outros dous triangulos X,Z, ſemelhantes entre ſi, e ao total.*

D*Em.*O triangulo X, he equiangulo ao total CED: por ſer o angulo E commum; os angulos O, C, rectos; e por conſeq. *a.* D, iguaes (32.1.) Do meſmo modo, o triangulo Z, he equiangulo ao meſmo total: logo ambos ſão equiangulos entre ſi; e por conſeq. todos tres ſemelhantes (4.) *Q.E.&c.*

COROLLARIOS.

1. A perpendicular CO he media proporcional entre os ſegmentos da baſe EO, OD.

Dem. Os angulos *a.* E, do triangulo X, ſão iguaes reſpectivamente aos angulos D, *i.* do triangulo Z: logo os lados oppoſtos aos primeiros ſão reſpectivamente proporcionaes aos oppoſtos aos ſegundos (4.) iſto he, EO : CO = CO : OD: logo &c.

2. O lado CE, he medio proporcional entre a baſe ED, e o ſegmento conjuncto EO: da meſma ſorte o lado CD, he medio proporcional entre a meſma baſe DE, e o ſegmento conjuncto DO.

Dem.

Dem. Os angulos C,D, do triangulo total ſão reſpectivamente iguaes aos angulos O, *a.* do triangulo X: logo pela meſma razão ED : CE = CE : EO &c.

PROPOSIÇÃO IX. *Probl.*

Dada a recta Z, dividilla na razão dada (CO : OA.) Fig. 9.

COnſtr. Ajuntem-ſe os termos da razão dada em huma recta CA; e tire-ſe do ponto C, com qualquer inclinação, a recta infinita CX : tome-ſe nella CB = Z; ajuntem-ſe os pontos A,B; e tire-ſe do ponto O huma parallela à AB: ſerà o ponto Q, a diviſão que ſe pede. Conſta da 2. deſte.

PROPOSIÇÃO X. *Probl.*

Dada a recta AB, dividilla em tantas partes, e nas meſmas razões, em que eſtá dividida a recta AC. Fig. 10.

COnſtr. He a meſma que a da antecedente, e conſta do Cor. da meſma 2.

ESCHOLIO.

DEſta Propoſição ſe colhe hum modo facil de dividir huma recta em quaeſquer partes iguaes; que he o ſeguinte. Seja a recta dada AC; e queira-ſe dividir em 3. partes iguaes. Tire-ſe do ponto A, huma recta infinita AX; e tomẽ-ſe nella com qualquer abertura de compaſſo 3. intervallos iguaes AF, FO, OB. Ajuntem-ſe os extremos B, C; e tirem-ſe as parallelas FG, OQ. &c.

Esta praxe de cortar huma recta por via de parallelas he muy sogeita a erro: pelo que darey dous modos de Maurolyco *mais seguros, e igualmente expeditos.*

Fig. 11. 1. *Dada a recta AB, tire-se apparallela CE, e tomem-se nella tantos intervallos iguaes CF, FG, &c. em quantos se dezeja dividir a dada: ajuntem-se os termos de huma, e outra com duas rectas CA, EB; e do ponto D, em que ambas concorrem, tirem-se aos pontos das divisões outras tantas rectas DF, DG. Digo que estas dividirão a dada em outras tantas partes iguaes. Consta do Cor. 2. da 4.* * *Advirta-se que se succeder ser a parallela CE igual â dada; as partes de huma serão iguaes âs da outra.*

Fig. 12. 2. *Dada a recta AP, tire-se de hum termo A, a infinita AX, e do outro P, a parallela PZ: tomem-se em huma, e outra, começando dos dittos termos, tantos intervallos iguaes, para huma, e outra parte, quantas são as partes em que se dezeia dividir a dada: e ajuntem-se os pontos correspondentes com outras tantas trãsversaes BT, CS, DR, EO, como mostra a Figura. Digo que estas hirão fazendo na ditta recta as divisões, que se pedem. Consta manifestamente do Cor. da 2.*

PROPOSIÇÃO XI. *Probl.*

Fig. 13. ***Dadas duas rectas BA, BC, achar huma terceira proporcional.***

C*Onstr.* Ajuntem-se as rectas dadas em qualquer angulo ABC; e produzida a primeira BA â descripção, tome-se nella AO, igual â segunda BC: ajuntem-se os pontos A, C; tire-se a parallela OQ; e continue-se a recta BC, até lhe occorrer em Q. Digo que CQ, he a terceira proporcional, que se pede.

Dem. BA : AO = BC : CQ (2.) isto he [pela igualdade das rectas AO, BC] BA : BC = BC : CQ. &c.

Por

Por outro modo: sejão as rectas dadas AC, CB, Fig. 14. e forme-se com ellas hum angulo recto ACB: ajuntem-se os pontos A,B; e tire-se do ponto B, huma perpendicular BO, a qual continuada occorra â primeira AC, tambem continuada, em O. Digo que CO, he a terceira proporcional, que se pede. Consta do Cor. 1. da 8.

ESCHOLIO.

NAõ parece que serà fora do meu instituto, dar aqui o modo de continuar qualquer Progressão Geometria Decrescente (isto he de mayor desigualdade) não somente por alguns termos, senão por infinitos: e determinar juntamente a somma de todos. Trata deste Problema, e absolutamente de toda a doutrina das Progressões o Padre Gregorio de S. Vicente *da Companhia de JESUS, com tanta novidade, subtileza, e clari-dade, que não parece que se pode discorrer com mais acerto nesta materia. A summa da sua doutrina darey com alguma extensão na* Geometr. Pract. *por agora, seguindo ao* Padre Taquet, *tambem da Companhia, illustrarey somente este problema, para satisfazer aos curiosos.*

Lemma I.

Se a razão de menor desigualdade (BA : CA) Fig. 20. se continuar por infinitos termos; vir-se ha a huma quantidade mayor que qualquer assignada.

TRansfirão-se todos os termos da ditta progressão para a recta FA, termo ultimo. Porquanto BA : CA = CA : DA, será invertendo, DA : CA = CA : BA; e dividindo, DC : CA = CB : BA; e alternando DC : CB = CA : BA. Porém CA he mayor que BA (Hyp.) *logo tambem DC he mayor que CB. Do mes-*

mesmo modo mostrarey ser ED mayor que DC; FE mayor que ED, &c. logo como continuando-se a progressão na quella recta, se vão successivamente acerescentando partes mayores, e mayores, necessariamente se hade vir a huma quantidade mayor que qualquer assignada.

Lemma 2.

Fig. 20. Se a razão de mayor desigualdade (FA : EA) se continuar por infinitos termos; vir-se-ha a huma quantidade menor que qualquer assignada.

Fig. 19. e 18. *SEja a progressão FA, EA, DA, &c. decrescente; e dê-se qualquer quantidade ZB, por minima que seja. Invertão-se os termos da razão dada; e faça-se como EA para FA, assim ZB para ZC. He certo, que continuando-se esta segunda progressão, se virá a huma quantidade ZP, mayor que FA* (Lem. ant.) *Supponhamos pois que os termos desta segunda progressão são 5. e que se continua a primeira por outros 5. Digo que BA, ultimo termo da primeira, serà menor que ZB, primeiro termo da segunda.*

Dem. *Por quanto invertendo os termos da ditta segunda progressão, as 4 razões ZP : ZE : ZD : ZC : ZB, são respectivamente iguaes às outras 4. razões da primeira, FA : EA : DA : CA : BA; serà por igual, ZP : FA = ZB : BA; porèm ZP he mayor que FA* (Hyp.) *logo tambem ZB he mayor que BA, &c.*

Problema

Problema.

Dada a razão de mayor desigualdade (FE:ED) continualla por infinitos termos, e determinar a summa de todos. Fig. 19

CONstr. *Ajuntem-se os termos da razão dada em huma recta; e levantem-se dos pontos F, E, duas perpendiculares FZ = FE; e EO = ED. Tire-se pelos extremos das dittas perpendiculares a recta ZO, a qual continuada occorra à FD, tambem continuada, em A.*

Digo 1. que se do ponto D, se levantar outra perpendicular DN, serà esta a terceira proporcional: e que se transferida DN para DC, se levantar do ponto C outra perpendicular CM, serà esta a quarta; e assim por diante: continuando-se sempre nas perpendiculares FZ, EO, DN, CM, BL, &c. e nos segmentos FE, ED, DC, CB, &c. a mesma proporção: e podendo-se sempre tirar do ultimo residuo BA, mais outro termo BL; por ser sempre este menor que aquelle, como o he FZ à respeito de FA: o que se collige do Cor. 1. da 4.

Digo 2. que FA he a summa de todos os termos daquella progressão; ainda que se considerem actualmente infinitos.

Dem. 1. *part. Porquanto FA : EA = FZ : EO* (Cor. 1. da 4.) *isto he = FE : ED* (Hyp.) *serà permutando, FA : FE = EA : ED; e por conversão da razão, FA : EA = EA : DA* (Cor. 1. da 18. 5.) *logo continuando huma mesma razão as rectas FA, EA, DA, tambem continuarão a mesma as perpendiculares FZ, EO, DN. Do mesmo modo mostrarey, que continuão a mesma razão as outras perpendiculares CM, BL, &c. logo &c.*

2. *Part. A summa dos infinitos termos daquella progressão nem he mayor, nem menor, que FA: logo he igual. Não he mayor; porque, como dissemos arriba,* aplicadas

aplicadas as perpendiculares FZ, EO, DN, &c á recta FA, todos os termos tem lugar nella, sem se chegar já mais ao ponto A. Não he menor, porque aplicadas as mesmas perpendiculares á recta FA, constituirão os residuos EA, DA, &c. outra progressão decrescente, cujo ultimo termo BA, será menor que qualquer assignado (Lem. 2.) *logo como nunca a summa dos dittos termos possa ser tanto menor que a recta FA, que não seja o seu defeito menor que qualquer assignado, segue-se que absolutamente não pode ser menor. Logo &c.*

THEOREMA.

Em qualquer progressão decrescente, a differença dos primeiros dous termos, o primeiro termo, e a summa de todos, continuaõ huma mesma razaõ.

Fig. 19. DEm. *Tire-se a recta OX, parallela à AF: será XZ a differença entre FZ, e EO (isto he, dos primeiros dous termos) FZ o primeiro; e FA a summa de todos: porem XZ : XO = FZ : FA (Cor. 1. da 4.) isto he [pela igualdade das rectas XO, FE, FZ] XZ : FZ = FZ : FA: logo &c.*

Por outro modo mais universal: seja a progressão
Fig. 20. *decrescente FA, EA, DA, &c. e transfirão-se todos os seus termos para o primeiro FA. Consta do ditto, que tambem as differenças FE, ED, DC, &c. constituirão outra progressão decrescente na mesma proporção; e que a recta FA he a summa de todas estas infinitas differenças. Isto supposto, por ser FA : EA = FE : ED, será alternando, e invertendo, FE : FA = ED : EA. Porem esta mesma razão, que tem cada differença para o*

ra o seu termo respectivo, tem tambem a summa de todas as differenças, para a summa de todos os termos (12.5.) *logo serà FE para FA, como a mesma FA para a summa dos dittos termos &c.*

PROPOSIÇÃO XII. *Probl.*

Dadas tres rectas BO, OA, BQ, achar huma quarta proporcional. Fig. 17.

COnstr. Disponhãose as 3. rectas, como mostra a Figura; isto he, a primeira, e a segunda a huma parte, e a terceira â outra; e juntos os pontos O, Q, com huma recta, tire-se a parallela AC. Digo que QC, serà a quarta proporcional, que se pede. Consta da 2.

ESCHOLIO.

O Padre Bettino *no seu Thesouro, fundado na* 35. *do* 3. *e na* 14. *deste, aqual não depende desta, traz hum modo muy engenhoso de achar terceira, e quarta proporcional, que he o seguinte.* Fig. 15.

Sejão as 3. *rectas dadas AO, BO, OC; e queira-se achar a quarta: Ajuntem-se a segunda, e a terceira em huma recta, e aplique-se a primeira ao ponto O: pelos* 3. *pontos B, A, C, descreva-se hum circulo* (3.4.) *ao qual occorra a recta AO continuada, em D. Digo que OD serà a quarta proporcional.*

Dem. *Os rectangulos AOD, BOC, são iguaes* (35. 3.) *logo* $AO : BO = OC : OD$ (14.)

Do mesmo modo. Dadas 2. *rectas AO, BO, busque-se a terceira. Tome-se em qualquer recta duas vezes a segunda, e aplique-se ao ponto O, a primeira AO. Descreva-se pelos* 3. *pontos B, A, C, hum circulo &c. e serà OD, a terceira, que se busca.* Fig. 16.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XIII. *Probl.*

Fig. 21. *Dadas 2 rectas AO, OC, achar huma media proporcional.*

Constr. Ajuntem-se as 2. dadas em huma recta, e descreva-se sobre ella hum semi-circulo, &c. Levante-se do ponto O, huma perpendicular O B; e será esta a media proporcional. Consta da 31. do 3. e do Cor. 1. da 8. deste.

COROLLARIO.

DAqui se segue, que se dê qualquer ponto B, da semi-circunferencia se tirar huma prependicular ao diametro; será esta media proporcional entre os segmentos.

ESCHOLIO.

N*Aõ será tambem fóra do assumpto dar aqui alguma luz daquelle celebre Problema, para cuja solução convidou* Platão *aos melhores engenhos, a saber*: Achar duas Medias proporcionaes entre duas rectas dadas. *No Appendiz 2. da Geometr. Pract. tratarey particularmente deste Probl. e proporey os melhores modos, que se offecerão aos Antigos para a sua solução; como tambem alguns dos Modernos, que não são menos engenhosos: por agora bastarà tocar sómente tres, que me parecem mais expeditos; e mais accommodados para principiantes.*

PRI-

1. Modo de *Platão*.

SEjão as rectas dadas AC, CB, entre as quaes se desejão 2. medias proporcionaes. Disponhão-se em angulo recto as dittas rectas; e continuem-se á descripção atè X, Z. Appliquem-se duas esquadras [Platão *usa de huma só com huma regoa movel, e normal*] *huma á recta CX, e outra á recta CZ, de tal sorte, que fique huma parallela á outra, e passem os lados pelos extremos das rectas dadas. Digo, que as rectas interceptas EC, CO, serão as medias que se buscão.* Fig. 22.

Dem. *Porquanto o angulo AEO, he recto; e EC, perpendicular á base AO; será esta media proporcional entre AC, CO* [Cor. 1. da 8.] *Pela mesma razão he tambem CO, media proporcional entre EC, CB: logo &c.*

2. Modo de *Philon Bysantino*.

SEjão as rectas dadas DE, EF. Disponhão-se em angulo recto; e perfeiçoe-se o rectangulo DEFA: estendão-se os lados AD, AF, á descripção: tirem-se os diametros AE, DF: e do ponto O, em que ambos se cortão, descreva-se hum circulo, o qual passe por todos os 4. pontos D, E, F, A (collige-se da 31. do 3.) Applique-se huma regoa ao ponto E; e mova-se de tal sorte, que sejão os segmentos BQ, EC, iguaes. Digo, que as rectas DB, FC, são as medias proporcionaes, que se buscão. Fig. 23.

Dem. *Porquanto BQ = EC* (Constr.) *será QC = BE: logo o Rect. QCE = Rect. EBQ; isto he (substituindo iguaes) será o Rect. ACF = Rect. ABD* (Cor. 1. da 36. 3.) *logo, reciprocando os lados, será AC : AB = DB : FC (pela 14. deste, a qual não depende desta) Porèm tambem AC : AB = DE : DB* (Cor. 1. da 4.)

 logo

logo DE , DB , FC, continuão a mesma razão. Do mesmo modo mostrarey, que DB , FC, EF, continuaõ a mesma razão (por ser tambem AC : AB = FC : EF) logo as duas rectas DB , FC , saõ medias proporcionaes entre as duas dadas DE , EF. &c.

* *Estes dous modos são engenhosos , e expeditos; porèm como a applicação, ou das Esquadras, ou das Regoas , se faz tentando ; não são Geometricos.*

3. Modo de *Des-Cartes.*

Fig. 24. E*Ste Author usa de hum instrumento , o qual consta de duas regoas moveis , e connexas em Z ; as quaes se armão com varias esquadras nos lados , de tal sorte accommodadas , que humas impellem , e attrahem as outras , segundo as regoas se abrem , ou fechão; como mostra a Figura. Com este instrumento pois , o qual tirou sem duvida do methodo de Eratosthenes, acha não só duas , mas quaesquer medias proporcionaes , entre duas rectas dadas ; o que nem por Secções Conicas , nem por outro qualquer methodo, se pòde conseguir.* Para *achar duas medias proporcionaes , usa de 3. esquadras AD , DB , BE: e para achar 3. usa de 4. &c.*

Sejão pois dadas as rectas ZA , ZE , entre as quaes se desejem sómente duas. Tomada a menor ZA, em huma regoa , e a mayor ZE , na outra; applique-se a primeyra esquadra ao ponto A; e assegure-se alli com hum parafuso; e juntas a ella as outras esquadras, abraõ-se as regoas , até que a terceira toque precisamente o ponto E. Digo que ZD, ZB , saõ as medias proporcionaes, que se buscaõ.

Dem. *Consta facilmente do* Corollar. 2. da 8. *Porquanto, pela construcção do instrumento , os triangulos ZDB , ZBE , saõ semelhantes: logo ZA : ZD = ZD : ZB = ZB : ZE. &c.*

Se entre ZA, e ZF , se quizerem 4. proporcionaes , se usa-

se usarà de 5. esquadras; e as regoas se abrirão atè que a quinta toque o ponto F. Se as medias proporcionaes forem pares, se tomarão as duas dadas em huma, e outra regoa; porém se forem impares, se tomarão ambas em huma mesma. Este modo, aindaque organico, e não tam simplez, como o de Platão*, he comtudo maravilhoso, por ser universal. Pelo que toca á fabrica do instrumento não deyxa de se offerecer alguma difficuldade nas larguras das regoas; porém isto se remette à industria dos Artifices.*

Achadas por qualquer dos 3. methodos arriba duas medias proporcionaes, não serà difficil resolver o problema Deliaco da duplicação do Cubo; como absolutamente qualquer outro, em que se pede o augmento, ou a diminuição de qualquer Solido Regular, em qualquer proporção dada; assim como diremos abayxo das Figuras Planas, por meyo de huma media proporcional; que foy invenção de Hippocrates*, a quem seguio despois toda a posteridade.*

PROPOSIÇÃO XVI. *Theor.*

Se os Parallelogrammos X, Z, forem iguaes, e tiverem 2. angulos em O, iguaes; terão tambem os lados, que comprehendem os dittos angulos, reciprocamente proporcionaes (Def. 2.) *E se tendo 2. angulos em O, iguaes, tiverem os dittos lados reciprocos, serão iguaes.* Fig. 25. 26.

DEm. 1. part. Ajuntem-se os angulos iguaes de tal sorte em O, que fiquem quaesquer 2. lados AO, OB, em huma linha recta; e por conseq. os outros 2. CO, OD em outra, (14. 1.) Continuem-se os lados CD, GB, atè concorrerem em Q; e forme-se outro parallelogrammo Y. Pela 1. deste, X : Y = AO : OB; e Z : Y = CO : OD. Porèm, pela igualdade dos parallelo-

 grammos

grammos X, Z (*Hyp.*) X : Y = Z : Y (7.5.) logo tambem AO : OB = CO : OD [11.5.] *Q. E. &c.*

2. Part. AO : OB = X : Y [1.] e CO : OD = Z : Y. Porèm AO : OB = CO : OD (*Hyp.*) logo X : Y = Z : Y (11.5.) e por conseq. X = Z (9.5.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XV. *Theor.*

Fig. 28. *Se os Triangulos AOD, COB, forem iguaes, e tiverem 2. angulos em O, iguaes; terão tambem os lados, que comprehendem os ditos angulos, reciprocos. E se tendo 2. angulos em O, iguaes, tiverem os lados, que os comprehendem, reciprocos; serão iguaes.*

D*Em.* Ajuntem-se os triangulos nos angulos iguaes, como assima; e tirada a recta BD, forme-se o triangulo BOD. O discurso he o mesmo, que o da ant.

COROLLARIO.

Fig. 27. 87. TAnto os parallelogrammos, como os triangulos, que tem as bases, e alturas reciprocas, são iguaes: e pelo contrario &c. Consta da antecedente, supposto o que fica demonstrado na 35. e 37. do 1.

PROPOSIÇÃO XVI. *Theor.*

Fig. 25. 25. *Se se derem 4. rectas proporcionaes AO : OB = CO : OD; serà o rectangulo X, comprehendido das 2. extremas AO, OD, igual ao rectangulo Z, comprehendido das 2. intermedias OB, CO. E se o rectangulo das extremas for igual ao das intermedias; serão as 4. rectas proporcionaes.*

D*Em.* Consta da 14. por serem os angulos em O rectos, ou iguaes.

PRO-

PROPOSIÇÃO XVII. *Theor.*

Se se derem 3. rectas continuamente proporcionaes DC : CG = CG : CO; será o rectangulo das extremas Y, igual ao quadrado da intermedia X. E se o rectangulo das extremas for igual ao quadrado da intermedia; serão as 3. rectas proporcionaes. Fig. 27.

DEm. He a mesma que a da ant. por ser EC = CG.

COROLLARIO.

DEsta, e da 13. consta, que o quadrado de qualquer perpendicular a hum diametro BO, he igual ao rectangulo dos 2. segmentos AO, OC. Fig. 21. ou 34.

PROPOSIÇÃO XVIII. *Probl.*

Dado qualquer polygono DB, construir sobre huma recta dada HE, outro semelhante. Fig. 31.

COnstr. Resolva-se o polygono dado em triangulos; e formem-se sobre a recta dada 2. angulos H, *u*. iguaes respectivamente aos 2. D, *o*. Continuem-se os lados atè concorrer em G; e formem-se sobre a recta GE, outros dous angulos *a*. *i*. iguaes respectivamente aos outros dous *r*. *e*. Serre-se a figura, e será o polygono HF, semelhante ao dado.

Dem. Primeiramente são equiangulos, como he manifesto. Tem tambem todos os lados respectivamente proporcionaes [por ser GE : CA = HE : DA (4.) e pela mesma razão todos os mais] logo &c.

PRO-

PROPOSIÇÃO XIX. *Theor.*

Fig. 29. 30. *Os triangulos ſemelhantes X, Z, ſão entre ſi em duplicada razão de quaeſquer dous lados correſpondentes AB, DE; iſto he, oppoſtos a iguaes angulos &c.* * *V. g. ſe ſe fizer como AB à DE, aſſim DE à huma terceira OB; ſerà o triangulo X ao triangulo Z, como AB à OB* (Def. 10. 5.)

DEm. Tire-ſe a recta CO. Porquanto os triangulos X, Z, ſão ſemelhantes, ſerà CB : FE = AB : DE; iſto he (*pela Conſtr.*) = DE : OB. Porem os angulos B, E, comprehendidos deſtes dous lados (reciprocamente proporcionaes) ſão iguaes (*Hyp.*) logo os triangulos Z, e OCB, ſão iguaes (15.) Porem o triangulo X, he ao triangulo OCB, como AB, à OB (1.) logo o meſmo triangulo X, he ao triangulo Z, como AB à OB (7. 5.) *Q. E. &c.* * O meſmo ſe entende, ſe ſe fizer como DE à AB, aſſim AB à DQ.

PROPOSIÇÃO XX. *Theor.*

Fig. 32. 33. *Os polygonos ſemelhantes AD, MP, dividem-ſe 1. em igual numero de triangulos ſemelhantes 2. proporcionaes aos ſeus todos 3. e eſtes ſão entre ſi em duplicada razão de quaeſquer dous lados correſpondentes.*

DEm. 1. part. Tirem-ſe de quaeſquer angulos iguaes C, O, rectas aos angulos oppoſtos A, E; M, Q. Porquanto os angulos B, N, ſão iguaes; e os lados, que os comprehendem, reſpectivamente proporcionaes

cionaes (*Hyp.*) ſerão os triangulos P, X, ſemelhantes (6.) pela meſma razão ſão tambem ſemelhantes os triangulos R, Y: logo tambem o ſerão os intermedios Q, Z: porque ſendo os angulos totaes A, C, E, iguaes reſpectivamente aos totaes M, O, Q; e ſendo mulctados de iguaes partes, ſegundo o ditto, tambem os remanentes hande ſer iguaes, e por conſequencia os triangulos ſemelhantes (4.)

2. Part. Porquanto os dittos triangulos ſão reſpectivamente ſemelhantes; ſerà P para X, em duplicada razão de BA para NM (*Ant.*) Q para Z, em duplicada razão de AE para MQ: e R para Y, em duplicada razão de ED para QP. Porem a razão dos lados he ſempre a meſma: logo tambem a dos triangulos (34. 5.) e por conſequencia, como qualquer delles para o ſeu correſpondente, aſſim todos juntos para todos juntos (12. 5.)

3. Part. Conſta da 2. por ſer hum polygono para outro polygono, como qualquer triangulo para o ſeu correſpondente; e eſtes em duplicada razão dos lados.

COROLLARIOS.

1 TOdas as figuras regulares (como triangulos equilateros, quadrados, pentagonos, &c.) ſão em duplicada razão dos lados homologos; por ſerem figuras ſemelhantes.

2. Se em 2. figuras ſemelhantes ſe conhecerem quaeſquer 2. lados, oppoſtos a iguaes angulos; ſe conhecerà tambem a proporção das dittas figuras, continuando a razão dos ditos lados por mais outro termo; e comparando o primeyro com o terceyro. V. g. ſeja AE de 4. palmos, e MQ de 6. e ſeja como 4. para 6. aſſim 6. para 9. Digo que a razão de 4. para 9. he a que tem as figuras propoſtas.

3. Daqui

3. Daqui ſe tira hum modo facil de diminuir, ou augmentar qualquer figura em qualquer razão dada. Seja AO, o lado da figuradada, e deſeje-ſe outra ſemelhante 5. vezes mayor. Tome-ſe em AO, continuada, o meſmo intervallo 5. vezes, deſde O atè C; e deſcreva-ſe ſobre a recta AC, hum ſemi-circulo. Levante-ſe do ponto O, huma perpendicular OB, atè à circunferencia: Digo que eſta ſerà o lado da figura, que ſe pede; a qual ſe deſcreve pela *Propoſ.* 18.

Dem. Conſta da 13. que AO, OB, OC, ſão continuamente proporcionaes; logo a figura AO, he para a figura ſemelhante OB, como AO para OC; iſto he, como 1. para 5. * O meſmo ſe entende dos circulos, pelo que diremos deſpois na 2. do 12.

PROPOSIÇÃO XXI. *Theor.*

Fig. 16. *As figuras X, Z, ſemelhantes a huma terceira Y, ſão ſemelhantes entre ſi.*

DEm. Conſta da *Def.* 1. deſte; do Ax. 2. do 1. e da 11. do 5.

PROPOSIÇÃO XXII. *Theor.*

Fig. 11. 11. 11. 13. *Se 4. ou mais rectas, forem proporcionaes; as figuras ſemelhantes, ordenadamente deſcriptas ſobre ellas, ſerão tambem proporcionaes. E pelo contrario, &c. V. g. ſeja AB : CD = EF : GH; e deſcrevão-ſe ſobre as duas primeiras os quadrados, X Z; e ſobre as outras duas os triangulos equilate-*

ros

ros P, Q: Digo que tambem X : Z = P : Q. E pelo contrario &c.

DEm. 1. part. Consta da 34. do 5. por ſerem tanto X para Z, como P para Q, razões duplicadas de razões iguaes (19. e 20.) A 2. part. consta da 35. do meſmo.

PROPOSIÇÃO XXIII. *Theor.*

Os parallelogrammos equiangulos X, Z, ſão entre ſi em razão composta da razões dos lados, que comprehendem iguaes angulos; iſto he, das razões de AO para OB, e de DO para OC (Def. 6.) Fig. 26.

DEm. Seja como DO para OC, aſſim OB para huma terceira S. Digo que X he para Z, como AO para S. Diſponhão-ſe os parallelogrammos, como moſtra a *Figura*; e concorrão os lados CD, GB em Q, &c. Pela 1. deſte, X : Y = AO : OB; porèm Y : Z = DO : OC; iſto he, = OB : S (*Conſtr.*) logo por igual, X : Z = AO : S. (23. 5.) *Q. E. &c.* * Veja-ſe a *Def.* 6. da qual ſe infere, que tambem X he para Z, como o producto dos antecedentes AO, DO, para o producto dos conſequentes OB, OC.

COROLLARIOS.

DEſta, e da 34. do 1. conſta 1. que os triangulos, que tiverem os angulos em C, iguaes, terão entre ſi a razão composta das dos lados, que comprehendem os dittos angulos; iſto he, de DC para CG; e de OC para CE. Fig. 27.

Z 2. Que

2. Que os rectangulos, ou quaesquer parallelogrammos, tem tambem entre si a razão composta das razões das suas bases, e alturas: o mesmo digo de quaesquer triangulos.

3. Que o modo de exhibir esta razão composta, assim dos parallelogrammos, como dos triangulos; he
Fig. 2. compondo a razão das bases AC, OQ, com a razão das alturas BX, PZ, pelo modo arriba.

PROPOSIÇÃO XXIV. *Theor.*

Fig. 38. *Em todo o parallelogrammo BH, os parallelogrammos parciaes DS, GF, existentes sobre o diametro, são semelhantes entre si, e ao total.*

D*Em.* Primeiramente são equiangulos, como facilmente se colhe da 27. do 1: tem tambem os lados respectivamente proporcionaes (por ser AG : AB = GO : BE (4.) e permutando, AG : GO = AB : BE; isto he, = OD : DE &c.) logo &c. (*Def.* 1.)

PROPOSIÇÃO XXV. *Probl.*

Fig. 35 35. *Dado hum polygono Z, transformallo em outro, semelhante a qualquer dado X. Ou tambem, dados dous polygonos Z, X, construir hum terceiro igual ao primeiro, e semelhante ao segundo.*

C*Onstr.* Sobre o lado PC, do segundo X, forme-se hum rectangulo R, igual a elle (44. 1.) e sobre o lado CA, deste mesmo rectangulo forme-se outro rectangulo S, igual ao primeiro Z: e porquanto os lados PC, CQ, fazem huma linha recta (14. 1.) busque-se entre hum, e ou-

e outro huma media proporcional CO (13.) e forme-ſe ſobre ella hum polygono ſemelhante ao ſegundo(18.) ſerà eſte tambem igual ao primeiro.

Dem. PC, CO, CQ, ſão continuamente proporcionaes: logo o polygono X, he ao polygono CO, como PC à CQ (20.) iſto he, como R à S (1.) logo permutando, ſerà X : R = polyg. CO : S. Porèm X he igual à R: logo tambem o polyg. CO, he igual à S; iſto he, à Z (*Conſtr.*) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XXVI. *Theor.*

Os parallelogrammos ſemelhantes DS, BH, que tem hum angulo E, commum, exiſtem ſobre o meſmo diametro. Fig. 31.

DEm. Se não exiſtem; ſeja o diametro do mayor ECA, o qual córte o lado do menor DO, em C; e tire-ſe a parallela CQ.

Os parallelogrammos DQ, BH, ſão ſemelhantes (24.) logo AB : BE = CD : DE. Porèm tambem BA : BE = OD : DE; por ſe ſupporem ſemelhantes DS, BH: logo CD, OD, tem para DE, a meſma razão; o que he abſurdo; por ſer huma recta parte da outra.

PROPOSIÇÃO XXVII. XXVIII. e XXIX.

Não tem uſo algum; e ſão prolixas.

PROPOSIÇÃO XXX. *Probl.*

Fig. 37. *Dada a recta CB, cortalla em media, e extrema razão* (Def. 3.)

Constr. Corte-se a recta dada de tal sorte em A, que seja o Rect. CBA igual ao Quad. CA (11. 2.) digo &c. *Dem.* Consta da 17. que CB he para CA, como CA para AB: logo &c. * He admiravel esta secção; e tem muyto uso por toda a Geometria, principalmente na comparação dos Corpos Regulares, como veremos no l. 13.

PROPOSIÇÃO XXXI. *Theor.*

Fig. 36. *Se em qualquer triangulo rectangulo BAC, se formarem tres figuras semelhantes sobre os lados: sempre a figura Y, opposta ao angulo recto, hade ser igual âs outras duas X, Z, formadas sobre os outros dous lados.* * Aqui se faz universal a 47. do 1.

Dem. Tire-se do angulo recto â base a *perpendicular* AO. Porquanto BC, BA, BO, são tres continuas proporcionaes (*Cor.* 2. *da* 8.) serà Y : X = BC : BO (20.) e pela mesma razão, serà Y : Z = BC : OC. Logo (*pela* 24. *do* 5.) serà Y : X + Z = BC : BO + OC; isto he, como igual para igual.

Por outro modo. O Quad. BC : Quad. BA = Polyg. Y : Polyg. X (22.) pela mesma razão, o Quad. BC : Quad. AC = Polyg. Y : Polyg. Z : logo o Quad. BC : QQuad. BA + AC = Polyg. Y : PPolyg. X + Z (24. 5.) isto he, como igual para igual (47. 1.)

COROL-

COROLLARIO.

DAqui se tira hum modo facil de fazer (dadas muitas figuras) huma igual a todas. Veja-se o *Probl.* 1. *do Eschol. da* 47. *cit.* Fazer huma igual a huma serie infinita de figuras decrescentes em qualquer proporção, não he menos facil; porem fica reservado este Problem. para a *Geom. Pract.*

PROPOSIÇÃO XXXII.

Não tem uso; nem contem couza particular.

PROPOSIÇÃO XXXIII. *Theor.*

Em circulos iguaes os angulos no centro PCQ, FCE; ou tambem na circunferencia PAQ, FBE, tem entre si a mesma razão, que os arcos em que insistem PQ, FE. * O mesmo digo dos sectores correspondentes (*Def.* 9. 3.) Fig. 39. 40.

DEm. Quanto aos angulos no centro, e sectores, a demonstração he a mesma, que a da 1. deste; com a differença sómente, que em lugar de se citar a 38. do 1. se cita aqui a 29. do 3. E como os angulos na circunferencia são metades dos angulos no centro (20. 3.) segue-se que o que se demonstra destes, se demonstra tambem daquelles (15. 5.)

COROLLARIOS.

1. O Angulo no centro FCE, he para 4. rectos, como o arco, em que insiste, para toda a circunferencia. Forme-se o angulo recto FCG, e argumente-se por igualdade de razões. Fig. 40.

2. Os

2. Os arcos FE, QO, de desiguaes circulos, que subtendem iguaes angulos (ou seja no centro, ou na circunferencia) são semelhantes.

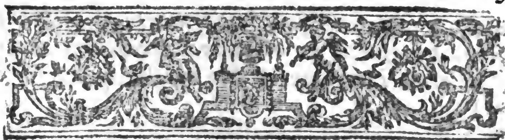
Dem. FE, he para a sua circunferencia, como FCE, para 4. rectos: QO he tambem para a sua circunferencia, como o mesmo FCE para 4. rectos: logo FE, he para a sua circunferencia, como QO para a sua &c.

3. Os dous semi-diametros CF, CE, cortão de quaesquer circunferencias concentricas semelhantes arcos FE, QO.

4. Os arcos EBE, QLO, de differentes circunferencias, em que existem iguaes augulos, são semelhantes. Consta do 2. *Cor. e da* 20. *do* 3.



ELEMEN-



ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA
LIVRO VII.
OU XI.

DESPOIS DOS 6. LIVROS DOS Planos, passa Euclides *nos* 3. *livros seguintes a tratar dos Numeros, para investigar com mais fundamento no* 10. *a natureza, e propriedades das* Linhas Incommensuraveis; *que he huma das mais subtis especulações da Geometria Elementar. Porèm eu, seguindo a alguns commentadores, deixarei todos estes* 4. *livros para o tratado da Arithmetica; e passarey immediatamente dos Planos aos Solidos; e do livro* 6. *ao* 11. *conservando todavia nas citações a ordem de* Euclides, *e sómente nos titulos a ordem que levo.*

Neste livro pois (a quem eu chamo 7. *e* Euclides 11. *e que corresponde ao* 1. *dos Planos) se estabelecem primeiramente os Principios geraes da doutrina dos Solidos; e despois*

pois se trata particularmente dos corpos mais simplices (e em que se resolvem todos os rectilineos) quaes são Parallelipipedos, *e* Prismas.

DEFINIÇÕES.

1. SOlido, ou *Corpo*: he huma quantidade perfeita, que tem todas as tres dimensões; a saber, longura, largura, e profundidade.

2. Os *Termos do Solido*: são as superficies extremas, com que se termina; ou sejão planas, ou curvas.

Fig. 1. 3. A recta AO, se diz ser *Pendicular ao plano ED*: quando com todas as linhas existentes no mesmo plano, e que passão pelo seu contacto O, forma angulos rectos AOB, AOC, AOD, &c.* Imagine-se que se revolve circularmente hum lado de hum angulo recto sobre o outro lado: será o immovel perpendicular ao plano, que descreve o movel.

Fig. 2. 4. O plano DA, he *Perpendicular ao plano BC*: quando qualquer recta AO, que nelle se tira perpendicular â commua secção DE, he tambem perpendicular ao outro plano.

Fig. 3. 5. Se a recta AB cahir obliquamente sobre o plano XZ; e do ponto A, se tirar huma perpendicular ao ditto plano AO; será o angulo ABO [que forma a ditta recta com a recta BO] a sua *Inclinação*.

Fig. 4. 6. Se o plano CD, cahir obliquamente sobre o plano ZX; será o angulo AOE, que formão quaesquer rectas AO, EO, perpendiculares â commua secção, a sua *Inclinação*.

7. Dous planos se dizem estar *Igualmente inclinados a outros planos*: quando as suas inclinações são iguaes.

8. *Pla-*

8. *Planos parallelos*: são aquelles, que produzidos para qualquer parte nunca concorrem: ou, que sempre distão entre si com iguaes intervallos. * Estes se tomão nas rectas AC, BD, perpendiculares a hum, e outro plano.

9. *Solidos rectilineos semelhantes*: são os que se comprehendem com igual numero de planos semelhantes.

10. *Angulo solido*: he o que comprehendem muitos angulos planos CAB, BAD, DAC, concurrentes em hum ponto A; mas não existentes em hum mesmo plano.* Para se formar hum angulo solido, são necessarios ao menos tres angulos planos.

11. *Angulos solidos iguaes*: são os que metidos huns dentro dos outros se ajustão perfeitamẽte entre si.

12. *Prisma*: he hum solido comprehendido por todas as partes de muitos planos; dos quaes os dous oppostos ABC, DEF, são parallelos, semelhantes, e iguaes; e todos os demais parallelogrammos.* Veja-se tambem a *Fig.* 7. Fig. 6.

13. *Parallelipipedo*: he hum solido comprehendido de 6. planos quadrilateros, cujos oppostos todos são entre si iguaes.

14. *Cubo*: he hum parallelipipedo comprehendido de 6. quadrados. Fig. 8.

PROPOSIÇÃO I. *Theorema.*

Huma recta não pode estar parte em hum plano, e parte em outro. Fig. 9.

DEm. Consta manifestamente do *Ax.* 14. do 1.

PROPOSIÇÃO II. *Theor.*

Fig. 10. *Duas rectas, que se cortão, existem em hum mesmo plano: como tambem todas as 3. de qualquer triangulo.*

DEm Cortem-se as rectas DC, BE; e imagine-se sobre qualquer dellas DC, produzido hum plano, o qual se circunvolva atè chegar â outra recta BE. He evidente, tanto pela *Def.* do plano, como pela *Ant.* que o ditto plano se hade ajustar com a ditta segunda recta: logo &c. O mesmo digo do triangulo.

PROPOSIÇÃO III. *Theor.*

Fig. 11. *Se 2. planos CD, QG, se cortarem; a commua secção AB, serà huma recta.*

DEm. Se não he; tire-se no primeiro plano a recta AOB, e no segundo a recta AFB: logo 2. rectas comprehendem espaço, contra o *Ax.* 13. do 1.

PROPOSIÇÃO IV. *Theor.*

Fig. 12. *Se a recta AO, for perpendicular a 2. rectas; serà tambem perpendicular ao plano, que por ellas passa*

DEm. Se não he; tire-se do ponto A, huma perpendicular ao ditto plano AQ; e juntos os pontos O, Q, com huma recta, tire-se a esta outra perpendicular no mesmo plano QC; a qual necessariamente hade cortar alguma das rectas dadas em algum ponto C; como se collige do *Esch. da* 31. *do* 1. Tire-se finalmente

te a recta AC, e considerem-se 4. triangulos rectangulos AOC (*Hyp.*) CQO (*Constr.*) AQO, AQC (*Def* 3.)

O quadrado AC, he igual aos quadrados AO+OC (47. 1.) porem AO, he igual à AQ+OQ; e OC, he igual à OQ+QC: logo o quadrado AC he igual aos quadrados AQ+QC+2.OQ. Porem (pela mesma 47.) houvera de ser igual sómente aos dous AQ+QC: logo he igual, e mayor a respeito dos mesmos, &c.

PROPOSIÇÃO V. *Theor.*

Se a recta AO, for perpendicular à 3. rectas OC, OB, OE, as quaes concorrão em hum ponto O; todas estas estarão em hum mesmo plano NM. Fig. 14.

DEm. Se não estão; passe pelas primeiras 2. o plano NM; e fique fora delle a recta OC. Continue-se o plano AOC, atè que occorra ao ditto plano NM, em OQ. Porquanto AO, he perpendicular âs duas primeiras rectas, serà tambem perpendicular ao plano, que por ellas passa (*Ant.*) logo serà perperdicular à OQ (*Def.* 3.) logo os 2. angulos AOC, AOQ, são rectos; contra o *Ax.* 10. 1.

PROPOSIÇÃO VI. *Theor.*

Duas rectas AD, BC, perpendiculares a hum plano MN, são parallelas entre si. Fig. 15.

DEm. Ajuntem-se os pontos D, C; e tire-se no plano dado a recta CO, igual à DA, e perdicular a DC. Tirem-se tambem as rectas AC, AO, DO. Os triangulos ADC, OCD, tem os angulos D, C,

 rectos,

rectos, e os lados que os comprehendem, respectivamente iguaes (*Constr.*) logo tambem as bases AC, DO, serão iguaes (4. 1.) logo os triangulos ADO, OCA, tem todos os lados respectivamente iguaes: logo os angulos oppostos ao lado commum AO (isto he, ADO, OCA) são iguaes (8. 1.) porem o primeiro he recto (*Hyp.*) logo tambem o segundo.

He pois a recta OC, perpendicular âs 3. rectas CD, CA, CB: logo todas 3. existem em hum plano (*Ant.*) no qual existe tambem a recta AD (1.) logo sendo as duas rectas AD, BC, perpendiculares a DC (*Hyp.*) serão parallelas entre si (29. 1.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO VII. *Theor.*

Fig. 12. *Se a recta QO, cortar duas rectas existentes em hum plano; existirà com ellas no mesmo plano.*

DEm. Consta manifestamente: porquanto de outra sorte, tirada outra recta no mesmo plano, as duas comprehenderião espaço contra o *Ax.* 13. do 1.

COROLLARIO.

DAqui se segue, que se QO cortar duas parallelas, existirà com ellas no mesmo plano: porquanto, como consta da *Def.* 36. *do* 1. as parallelas sempre existem em hum plano.

PROPO-

PROPOSIÇÃO VIII. *Theor.*

Se huma de duas parallelas AD, for perpendicular a hum plano; tambem o será a outra BC. Fig. 15.

DEm. He a mesma que a da *Prop.6.* Porquanto, feita a mesma construcção, segue-se pelo mesmo discurso, que OC he perpendicular à CD, e CA; e por consequencia ao plano, que por ellas passa (4.) no qual existe CB: logo sendo BC, perpendicular à CD, e CO, tambem o será ao plano, que por ellas passa *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO IX. *Theor.*

Se as rectas OA, QD, forem parallelas a huma terceira CB; aindaque não existão com ella no mesmo plano, serão parallelas entre si. Fig. 16.

DEm. Tirem-se duas perpendiculares OC, QC, a hum mesmo ponto da recta (CB cada huma em seu plano) e ajuntem-se os pontos O, Q, com huma recta. Porquanto BC, he perpendicular âs rectas CO, CQ, será tambem perpendicular ao plano OCQ [4.] logo como AO, DQ, são parallelas â ditta perpendicular, serão tambem perpendiculares ao mesmo plano (*Ant.*) e por conseq. parallelas entre si (5.) *Q. E. &c.*

PROPOSIC,ÃO X.

Se 2. rectas AB, AC, concurrentes em hum plano, forem parallelas à outras 2. rectas QP, QO, Fig. 17.

QO, concurrentes em outro plano; comprehenderão iguaes angulos BAC, PQO.

DEm. Tome-ſe AB = QP, e AC = QO; e ajuntem-ſe os extremos com as rectas BC, PO; BP, AQ, CO. Porquanto AB, QP, ſão iguaes, e parallelas; ſerão tambem iguaes, e parallelas AQ, BP (33. 1.) e pela meſma razão AQ, CO: logo tambem BP, CO, ſerão iguaes, e parallelas (*Ant.*) e pela meſma razão CB, OP: logo os triangulos BAC, PQO, ſão reſpectivamente equilateros: e por conſeq. tem os angulos A, Q, oppoſtos a iguaes lados, iguaes (8. 1.) *Q.E. &c.*

PROPOSIÇÃO XI. *Probl.*

Fig. 18. *Dado fóra de hum plano hum ponto A, tirar delle huma perpendicular ao ditto plano.*

COnſtr. Tire-ſe no plano dado qualquer recta BD; e a eſta deſde o ponto dado huma perpendicular AC: do ponto C, tire-ſe no meſmo plano outra perpendicular CO; â qual occorra, deſde o meſmo ponto dado, outra perpendicular AO. Digo que eſta ſerà a perpendicular, que ſe pede.

Dem. Tire-ſe pelo ponto O, EF, parallela à BD. Porquanto BC, he perpendicular à CA, e CO (*Conſtr.*) ſerâ tambem perpendicular ao plano ACO (4.) logo tambem EO, ſerà perpendicular ao meſmo plano (*8.*) logo a recta AO, he perpendicular à OE (*Def. 3.*) he tambem perpendicular à OC (*Conſtr.*) logo ſerà perpendicular ao plano, em que ellas exiſtem (4.) iſto he, ao plano dado. *Q.E. &c.*

Fig. 15. * Levanta-ſe facilmente huma perpendicular ſobre hum plano, por beneficio de 2. eſquadras ADC, ADO, concurrentes em hum ponto; como ſe infere da 4.

PRO-

PROPOSIC,ÃO XII. *Probl.*

Dado em hum plano hum ponto O, levantar delle huma perpendicular ao mesmo plano. Fig. 19.

COnstr. Tire-se pela *Ant.* de qualquer ponto B, fora do plano dado, huma perpendicular BC, ao ditto plano; e tire-se do ponto O, huma parallela à CB. Digo &c. Consta da 8.

PROPOSIC,ÃO XIII. *Theor.*

Duas rectas AO, CO: ou, OA, OC, tiradas ao mesmo ponto, ou do mesmo ponto, à qualquer plano; não podem ser ambas perpendiculares ao mesmo plano. Fig. 20.

DEm. Consta manifestamente; porquanto se o fossem, serião parallelas entre si (6.) e concorrerião em hum ponto; o que he absurdo.

PROPOSIC,ÃO XIV. *Theor.*

Se a recta AC, for perperdicular a 2. planos; serão estes parallelos entre si. Fig. 21.

DEm. Tire-se do ponto B, de qualquer dos planos, huma parallela à AC, aqual occorra ao outro plano em D. He sem duvida, que BD, tambem he perpendicular a ambos os planos (8.) logo tiradas as rectas AB, CD, serà o quadrilatero AD, rectangulo (*Def.* 3.) logo os lados oppostos AC, BD, são iguaes (34. 1.) Do mesmo modo mostrarey, que todas as parallelas a AC, são tambem perpendiculares a ambos os planos, e iguaes entre

entre si: logo os dittos planos são parallelos (*Def.* 8.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XV. *Theor.*

Fig. 22. *Se 2. rectas AB, CB, concurrentes em hum ponto, forem parallelas a outras 2. GD, ED, concurrentes em outro ponto; os planos que por ellas passão serão tambem parallelos.*

DEm. Tire-se a perpendicular BO, do concurso das primeiras ao plano das segundas; e tirem-se neste outras 2. parallelas às mesmas segundas QO, PO, concurrentes em hum ponto O. Porquanto tanto as rectas AB, CB, como as rectas QO, PO, são parallelas às rectas GD, ED, serão estas parallelas entre si (9.) logo assim como são rectos os 2. angulos BOQ, BOP (*Def.* 3.) tambem o serão os outros 2. OBA, OBC (27. 1.) e por consequencia será BO perpendicular a hum, e outro plano (4.) e estes parallelos entre si (*Ant.*) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XVI. *Theor.*

Fig. 23. *Se hum plano AD, cortar dous planos parallelos; serão tambem parallelas as communas secções AC, BD.*

DEm. Se não são; continue-se o plano AD; e concorrão as secções no ponto N: logo tambem, se se continuarem os planos parallelos, concorrerão no mesmo ponto (1.) contra a *Def.* 8.

PRO-

PROPOSIÇÃO XVII. *Theor.*

Se por quaesquer planos parallelos passarem quaesquer rectas AC, DF; ficarão estas cortadas proporcionalmente pelos ditos planos; isto he, será AB : BC = DE : EF. Fig. 24

DEm. Tire-se a recta AF; e nos planos parallelos as rectas AD, BO+OE, CF. Porquanto o triangulo CAF, corta planos parallelos, serão as secções BO, CF, parallelas (*Ant.*) logo AB : BC = AO : OF (2.6.) porem pela mesma razão, DE : EF = AO : OF. logo AB : BC = DE : EF (11.5.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XVIII. *Theor.*

Se a recta OQ for perpendicular a hum plano; todos os planos, que por ella passarem, serão perpendiculares ao mesmo. Fig. 25.

DEm. Passe pela recta dada o plano AO, cuja secção commua seja AB; e tirem-se no ditto plano quaesquer perpendiculares â ditta commua secção. Porquanto todas estas perpendiculares existem no mesmo plano com OQ, e todas formão angulos rectos com a mesma recta AB; serão entre si parallelas (29.1.) logo sendo OQ, perpendicular ao plano dado, o serão tambem as outras (8.) e por consequencia o plano, em que todas existem (*Def.* 4.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XIX. *Theor.*

Fig. 26. *Se se cortarem dous planos DA, BA, perpendiculares a outro terceiro DBE; serà a commua secção AO, perpendicular ao mesmo terceiro plano.*

DEm. Consta da *Def.* 4. que se do ponto O, se levantar huma perpendicular ao plano DBE, existirà esta em ambos os planos DA, BA: logo na secção commua OA (13.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XX. *Theor.*

Fig. 27. *Dado hum angulo solido O, comprehendido de tres angulos planos; serão quaesquer dous destes mayores que o terceiro.*

DEm. Se todos os 3. angulos forem iguaes, a razão he manifesta: se forem desiguaes; tire-se do mayor BOD, o angulo BOQ igual a qualquer dos outros 2. BOA; e igualadas as rectas OQ, OA, tire-se o plano ABQD.

Porquanto os triangulos BOA, BOQ, tem os angulos em O iguaes; e iguaes respectivamente os lados, que os comprehendem; serão tambem iguaes as bases BA, BQ (4. 1.) Porem no triangulo BAD (base do solido) os 2. lados BA, AD, são mayores que o terceiro BD (20. 1.) logo tirando de ambas as partes as iguaes BA, BQ, ficarà AD, mayor que QD: logo nos triangulos AOD, QOD, em que os lados são respectivamente iguaes, e as bases desiguaes, serà o angulo AOD, opposto â mayor base, mayor que o angulo QOD, opposto â menor (25. 1.) e por conseq. os dous juntos BOA,

BOA, AOD, ferão mayores que o terceiro BOD. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXI. *Theor.*

Todos os angulos planos juntos, que comprehendem qualquer angulo ʃolido O, ʃão menores que 4. rectos. Fig. 21.

D*Em.* Corte-ſe o angulo ſolido com qualquer plano, no qual formem as ſecções dos lados o rectilineo ABCDE. Porquanto os dous angulos BAO, EAO, ſão maiores que o terceiro BAE (*Ant.*) e aſſim dos demais, ſerão todos os angulos das baſes dos triangulos R, S, T, V, X, mayores que os angulos da figura ABDDE: porem os angulos da ditta figura juntamente com 4. rectos, fazem tantas vezes 2. rectos quantos ſão os lados (*Eſch. da* 32. *do* 1. *Theor.* 2.) e os angulos das baſes dos dittos triangulos R, S, T, V, X, juntamente com os do vertice O, fazem a meſma ſomma (32. 1.) logo os dittos angulos em O, ſão menores que 4. rectos. *Q.E.&c.*

COROLLARIO.

DEſta, e da antecedente conſta, que quaeſquer 3. angulos planos podem formar hum angulo ſolido; com tanto que todos juntos ſejão menores que 4. rectos; e quaeſquer 2. mayores que o terceiro, ſe forem 3.

ESCHOLIO.

T*Ambem nella tem ſeu principio aquelle celebre Theorema, de que fallaremos mais largamente no livro* 13. *a ſaber*, que ſómente 3. planos regulares

 podem

podem formar angulos solidos; e por consequencia corpos regulares; isto he, 3. triangulos equilateros, 3. quadrados, e 3. pentagonos. *A razão he, porque para se formar hum angulo solido, são necessarios ao menos 3. angulos planos, os quaes não cheguem a 4. rectos; isto he, à 360. gráos: porem sómente os angulos destas 3. figuras tem esta condição; porquanto os angulos do triangulo equilatero constão de 60. gráos: os do quadrado de 90: e os do pentagono de 108: e 3. dos primeiros fazem 180. 3. dos segundos 270. e 3. dos terceiros 324. E pelo contrario, os angulos do hexagono constão de 120. gráos, e 3. delles fazem 360. gráos (e muitos mais os das figuras mayores) logo sómente aquellas 3. figuras regulares podem formar angulos solidos.*

Quanto aos corpos regulares (que são os que se comprehendem com planos regulares, e iguaes) digo tambem que não podem ser mais que 5. a saber Pyramide, *ou* Tetraëdro, Octaëdro, Icosaëdro, Cubo, *e* Dodecaëdro. *A razão he, porque ou os dittos corpos se compoem de triangulos, ou de quadrados, ou de pentagonos: se de triangulos, como estes só se podem multiplicar por 3. ou por 4. ou por 5. sem chegar a 4. rectos; segue-se, que só se podem formar delles 3. angulos solidos differentes, e por consequencia 3. corpos regulares; a saber, o* Tetraëdro *com 4. triangulos, o* Octaëdro *com 8. e o* Icosaëdro *com 20. Se de quadrados, e pentagonos, como estes só se podem multiplicar por 3. sem passar de 4. rectos; segue-se que só se podem formar delles 2. corpos; a saber, o* Cubo, *o qual consta de 6. quadrados; e o* Dodecaëdro, *o qual consta de 12. pentagonos &c. Porem disto fallaremos, como disse, mais largamente no livro citado.*

PROPOSIÇÃO XXII. e XXIII.

São inuteis, e prolixas.

PRO-

PROPOSIÇÃO XXIV. *Theor.*

Todos os 6. planos HF, LG; HC; DG; &c. de qualquer parallelipipedo HG; são parallelogrammos. E quaesquer 2. oppostos são semelhantes, e iguaes. Fig. 29.

DEm. 1. part. Os planos HF, LG, são parallelos (*Def.* 13.) logo as secções HA, LC, são parallelas (16.) e pela mesma razão as secções AC, HL: logo o plano HC, he parallelogrammo; e pelo mesmo discurso todos os demais &c.

2. Part. Consta da 1. parte que as rectas AH, DH, concurrentes em H, são parallelas à CL, BL concurrentes em L: logo os angulos H, L, são iguaes (10.) o mesmo se entende dos outros 3. angulos A, F, D, a respeito dos outros 3. oppostos C, G, B. Item os lados HA, HD, são respectivamente iguaes a os lados LC, LB (34. 1.) logo absolutamente os planos oppostos HF, LG, são semelhantes, e iguaes: e pela mesma razão todos os demais. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXV. *Theor.*

Se a hum parallelipipedo RS, cortar hum plano NO, parallelo a qualquer dos lados oppostos RQ, ou PS; cortallo ha na mesma proporção, que a base TS: isto he, será TO: OV = RO: OP. Fig. 31. O mesmo se entende dos prismas. Fig. 6, 7.

DEm. He semelhante â 1. do 6.

COROL.

COROLLARIO.

Fig. 6. e 7. A Secção do prisma parallela â base he igual, e semelhante â mesma base; ou tambem ao plano opposto.

PROPOSIÇÃO XXVI. e XXVII.

São superfluas.

PROPOSIÇÃO XXVIII. *Theor.*

Fig. 29. *O plano que passa pelos diametros AD, CB, de quaesquer planos oppostos de hum parallelipipedo HG, divide o ditto parallelipipedo em 2. prismas iguaes.*

D*Em.* Consta da 24. que AC, DB, são parallelas à HL: logo são parallelas entre si (9.) e estão no mesmo plano com as diagonaes AD, CB. Provo agora que o ditto plano corta o parallelipipedo HG, em 2. prismas iguaes. Primeiramente, se o parallelipipedo he recto, imagine-se o prisma ADG, dentro do prisma ADL; e que cahe o ponto F, sobre o ponto *H*; e *G*, sobre L: he evidente, que sendo a inclinação dos planos HC, HB, igual â dos planos FB, FC; e que sendo estes respectivamente iguaes; como tambem todos os 4. triangulos AHD, AFD, &c. (34.1.) se ajustarão os prismas perfeitamente entre si: logo &c.

Se he obliquo; accommodados os prismas do mesmo modo, ficarão formadas arriba, e abaixo 2. pyra-
Fig. 30. mides quadrilateras DDH, BBG; as quaes pelo discurso da *Prop.* seguinte, estão comprehendidas de 5. planos, em sitio, em grandeza, e em figura respectivamente iguaes: logo accommodada tambem huma dentro

dentro da outra, se ajustarão perfeitamente entre si: e por consequencia accrescentando âs dittas pyramides o solido intermedio, tambem os prismas serão iguaes. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XXIX. e XXX. *Theor.*

Se os parallelipipedos OOCCCCQQ, AACCCCAA, tiverem a mesma, ou igual base, CCCC, e estiverem entre os mesmos planos parallelos CCCC, AAOOQQ, serão iguaes. Fig. 331.

DEm. Se os dittos parallelipipedos estiverem tambem entre os mesmos planos lateraes ACCQ, ACCQ; consta facilmente: porquanto pela 24. deste, e pela 8. do 1. todos os triangulos ACO, ACQ, &c. são iguaes, e semelhantes; e todos os planos, que comprehendem os 2. prismas ACO, ACQ, são tambem iguaes, e semelhantes respectivamente: logo os dittos prismas são iguaes entre si; isso he, metido hum dentro do outro, se ajustarão perfeitamente: logo accrescentando a cada hum delles o solido intermedio OOCCCCAA, os parallelipipedos serão iguaes. *Q. E. &c.*

Se não estiverem entre os mesmos planos lateraes; Fig. 332. seja o segundo parallelipipedo EECCCCEE. Continuem-se os planos do primeiro QC, QC, atè que occorrão aos planos continuados do segundo EC, EC; e forme-se outro terceiro parallelipipedo AACCCCAA (*Def.* 13.) Porquanto este existe entre os mesmos planos lateraes com o primeiro, e com o segundo, serà igual a cada hum delles (1. *part.*) logo estes serão iguaes entre si. *Q. E. &c.* * Esta *Prop.* corresponde â 35. *do livro 1.*

PRO-

PROPOSIÇÃO XXXI. *Theor.*

Fig. 34. *Todos os parallelipipedos, que tem iguaes bases AE, EN (seja qualquer a figura) e a mesma altura Z, são iguaes.*

DEm. Supponhamos que os parallelipipedos são rectos; e que estão dispostos de maneira, que os lados DE, EF, fazem huma recta. Continuem-se os lados AB, BE; e tirem-se as parallelas necessarias, atè formar 2. parallelogrãmos BF, EQ, dos quaes o ultimo seja igual ao rectilineo EN (45. 1.) Sobre todos os 4. planos AE, BF, EN, EQ, imaginem-se levantados outros tantos parallelipipedos, todos da mesma altura Z. Porquanto AE.Z, he para BF.Z, como AE para BF (25.) isto he, como EN para BF (*Hyp.*) isto he, como EQ para BF (*Constr.*) isto he, como EQ.Z, para BF.Z (25.) serão AE.Z, EQ.Z, iguaes (9.5.) porem EQ.Z, he igual à EN.Z, (*Ant.*) logo tambem AE.Z, EN.Z, são iguaes entre si. *Q. E. &c.*

Se os Parallelipipedos forem obliquos; formem-se sobre as suas bases outros rectos com a mesma altura, aos quaes elles sejão iguaes (*Ant.*) e proceda-se com o mesmo discurso.

PROPOSIÇÃO XXXII. *Theor.*

Fig. 36. *Quaesquer parallelipipedos igualmente altos são entre si, como as bases.*

DEm. Sejão as bases NQ, e X; e seja a altura Z. Continue-se QO, e formese sobre NO, hum parallelogrammo MO, igual à X. Imagine-se sobre todo o parallelogrammo MQ, formado hum parallelipipedo com a mesma altura Z. Serà MO.Z, para NQ.Z,

como

como MO, para NQ (25.) porem MO, he igual à X (*Constr.*) e MO.Z, igual à X.Z, (*Ant.*) logo substituindo iguaes por iguaes; isto he, plano por plano, e solido por solido, serà X.Z, para NQ.Z, como X para NQ. *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

O *Que digo dos Parallelipipedos, demonstrarey depois no livro seguinte das Pyramides*, Prop. 6. *dos Prismas*, Cor. da 9. *e dos solidos Conicos, e Cylindricos*, Prop. 11.

PROPOSIÇÃO XXXIII. *Theor.*

Os parallelipipedos semelhantes RO, QL, são entre si em triplicada razão de quaesquer 2. lados homologos, RQ, QE; ou KQ, QN, &c. Fig. 15.

DEm. Sendo os parallelipipedos semelhantes, serão tambem semelhantes todos os planos correspondentes (*Def.* 9.) isto he, serão os angulos dos dittos planos respectivamente iguaes; e os lados, que os comprehendem, respectivamente proporcionaes (*Def.* 16.) isto he, serà RQ : QE = KQ : QN = CQ : QH. Disponhão-se pois os dittos parallelipipedos de tal sorte, que juntos os vertices de quaesquer angulos iguaes RQK, EQN, fiquem em hum mesmo plano; e em direitura os lados, que os comprehendem (14. 1.) como tambem os que comprehendem os outros 2. angulos RQC, EQH, &c.

Continuem-se os planos, que forem necessarios (como mostra a *Figura.*) e formem-se 3. parallelipipedos communicantes; isto he, RA, cortado pelo plano QO : KG, cortado pelo plano QB : e CL, cortado pelo plano QF. Isto supposto,

Os 4. ſolidos, em que eſtão divididos os 3. communicantes; iſto he, RO, QA, NB, QL, ſão continuamente proporcionaes, e todos continuão a meſma razão de quaeſquer 2. lados homologos dos parallelipipedos extremos (ou dados.) Porquanto RO : QA = RK : QD (25) iſto he, = RQ : QE (1. 6.) Item, QA : NB = QD : NE; iſto he, = KQ : QN. Item, NB : QL = NC : HN; iſto he, = CQ : QH. Porem todas eſtas razões (RQ : QE) (KQ : QN) (CQ : QH) ſão a meſma: logo todos os 4. ſolidos continuão entre ſi huma meſma razão de quaeſquer 2. lados homologos; e por conſequencia o primeiro RO, he para o ultimo QL, em triplicada razão deſſa meſma razão (*Def.* 10. 5.) *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

O *Que digo dos Parallelipipedos, demonſtrarey deſpois no livro ſeguinte das Pyramides*, Prop. 8. *dos Priſmas*, Cor. 2. da 9. *de quaeſquer ſolidos Conicos, ou Cylindricos, na* 12. *e das Esferas, na* 18.

PROPOSIÇÃO XXXIV. *Theor.*

Fig. 37. 37. *Se os parallelipipedos AB, QO, forem iguaes; reciprocarão as baſes com as alturas; iſto he, ſerá a baſe do primeiro Z. para a baſe do ſegundo X; como a altura do ſegundo QP, para altura do primeiro AD. E pelo contrario, ſe reciprocarem as baſes com as alturas, ſerão iguaes.*

D*Em.* 1. part. Supponhamos 1. que os parallelipipedos ſão rectos: neſte cazo, ou as alturas ſão

são iguaes, ou não: se o são, consta da 32: e se não, corte-se da mayor AD, huma parte CD, igual a QP; e tire-se pelo ponto C, hum plano CG, parallelo â base. Porquanto CB : QO = Z : X (32.) item CB : AB = CD : AD (25.) isto he (substituindo iguaes pela *Hyp.* e *Constr.*) CB : QO = QP : AD; serà Z : X = QP : AD (11. 5.) logo &c.

Supponhamos 2. que são obliquos. Considerem-se sobre a mesmas bases, e com as mesmas alturas formados outros rectos: estes, pelas 29. e 30. são iguaes aos obliquos; e pelo ditto arriba reciprocao as bases com alturas: logo tambem aquelles.

2. Part. Supponhamos tambem 1. que os parallelipipedos são rectos, e as alturas desiguaes. Feita a mesma divisão, serà QO : CB = X : Z; isto he, = AD : CD (*Hyp.*) isto he, = AE : CE (1. 6.) isto he, = AB : CB (25.) logo QO = AB (9. 5.) *Q.E.&c.*

Se são obliquos, consta do discurso arriba.

COROLLARIO.

TUdo o que temos demonstrado dos parallelipipedos nas *Proposições* 29. 30. 31. 32. 33. e 34. se entende do mesmo modo dos prismas triangulares, por serem metades dos dittos parallelipipedos (28.) Peloque.

1. Os prismas triangulares igualmente altos são entre si em triplicada razão de quaesquer lados homologos; isto he, oppostos a iguaes angulos. Fig. 40.

3. Os iguaes, reciprocão as bases com as alturas.

4. E os que as reciprocao, são iguaes.

ESCHOLIO.

A *Doutrina dos Parallelipipedos se estenderà despois no livro seguinte ás Pyramides, na* Proposição 9. *a quaesquer Prismas multilateros, nos* 3. Corollarios *da mesma* Prop. *e ás Pyramides Conicas, e Cylindros, desde a* 11. *atè à* 15.

PROPOSIÇÃO XXXV.

Serve para demonstrar a seguinte, aqual sem ella se demonstra.

PROPOSIÇÃO XXXVI. *Theor.*

Fig. 38. 28. *O parallelipipedo AH, formado de tres continuas proporcionaes, he igual ao parallelipipedo DO, formado sómente da media, com tanto que sejão ambos equiangulos.*

DEm. Supponhamos, que no parallelipipedo AH, os tres lados AE, EL, EG, são continuamente proporcionaes: e que no parallelipipedo DO, os tres lados DB, BI, BC, todos são iguaes a EL.

Porquanto AE : DB = BC : EG (*Hyp.*) serão os planos DC, AG, iguaes (14.6.) porem pela igualdade dos angulos solidos B, E (*Hyp.*) e das rectas BI, EL, accomodado hum angulo dentro do outro, o plano IA, coincide com o plano LF: logo as alturas são iguaes, e por consequencia tambem os dous parallelipipedos (31.) *Q.E.&c.*

ESCHOLIO.

DEsta Prop. *se infere que dadas quaesquer rectas* Fig. 38.
1.2.3. todas tres perpendiculares entre si, e concurrentes em hum ponto; dequalquer modo que se combinem, sempre compoem o mesmo solido. Sejão as combinações 12.3. 31.2. 23.1. em que as primeiras duas letras indicão a base, e a terceira a altura do solido: comparando pois o primeiro ternario com o segundo, a base 12. he para a base 31. como 2. para 3. (1.6.) isto he, como a altura do segundo para a altura do primeiro: logo estes dous solidos são iguaes. Item, comparando o segundo com o terceiro, a base 31. he para a base 23. como 1. para 2. isto he, como a altura do terceiro para a altura do segundo: logo tambem estes dous solidos são iguaes. &c.

PROPOSIÇÃO XXXVII. *Theor.*

Se 4. rectas forem proporcionaes 2 : 4 = 3 : 6. os parallelipipedos semelhantes, formados ordenadamente sobre ellas, serão proporcionaes. E se o forem, tambem o serão as rectas.
* He semelhante esta *Prop.* à 22. do 6.

D*Em.* 1. part. Consta da 33. que as razões dos dittos parallelipipedos são triplicadas das razões das dittas rectas: porém estas são iguaes (*Hyp.*) logo tambem aquellas (34. 5.) *Q. E. &c.*

A 2. part. Consta da 35. do 5.* Esta *Prop.* he universal para quaesquer solidos semelhantes; os quaes, como mostrarey no livro seguinte, todos são em triplicada razão dos seus lados homologos. Fig. 40.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XXXVIII. e XXXIX.

São inuteis, e não contem couza memoravel.

PROPOSIÇÃO XXXX. *Theor.*

Fig. 39. 30. *Se 2. prismas triangulares PEQ, QSOR, tiverem iguaes alturas QE, RO; e a base de hum PE, for parallelogramma, e dupla da base triangular QSO, do outro; serão os dittos prismas iguaes.*

DEm. Formem-se dos dittos prismas os 2. parallelipipedos EO, OE. Pela igualdade das bases EP, OK (34. 1.) e pela igualdade das alturas QE, RO (*Hyp.*) os dittos parallelipipedos são iguaes (31.) logo tambem o serão os prismas metades suas (28.) *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

NA 41. do 1. e no Escholio da 36 do mesmo, *demos o modo de medir quaesquer parallelogrammos, em palmos, ou quaesquer medidas vulgares quadradas: agora concluiremos este livro, dando o modo de medir quaesquer parallelipipedos em palmos, ou quaesquer medidas cubicas. Reduzida pois a base de qualquer parallelipipedo a palmos quadrados: e conhecida em palmos a sua altura; multiplique-se hum numero por outro, e o producto será o numero dos palmos cubicos, de que consta aquelle solid. V. g. supponhamos que a base DB, consta de 18. palmos quadrados, por constar o lado EB, de 5. e a perpendicular ED,* (Fig. 37.)

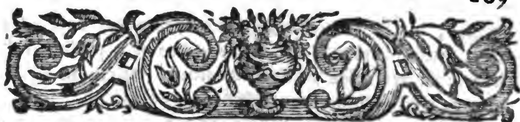
de

de 3. *e* $\frac{7}{10}$. *e supponhamos que a altura AD, consta de* 8. *Digo que o producto destes numeros* [18. *e* 8.] *isto he*, 144. *são os palmos cubicos, de que consta aquelle parallelipipedo. O mesmo se entende dos prismas. &c.*



ELEMEN-





ELEMENTOS DE GEOMETRIA

LIVRO VIII. *OU* XII.

NESTE LIVRO, QUE CORRESPONDE nos Solidos ao 6. dos Planos, trata Euclides *particularmente das Pyramides (assim rectilineas, como conicas) dos Cylindros, e das Esferas; e examina todas as suas medidas, e porporções; razão porque he muy familiar aos* Geometras *Practicos. Dos mais Corpos Polyëdros trata no livro seguinte: e nòs tanto destes como das Concïdes, e Esferoïdes trataremos nos Selectos de* Arquimedes, *em huma e outra Geometria.*

DEFINIÇÕES.

1 SE fora de qualquer plano rectilineo BD, se tomar hum ponto A, no qual concorrão tantos triangulos, quantos são os lados do ditto rectilineo, BAE, EAD, &c. serà o solido assim comprehendido huma *Pyramide re-* Fig. 1.

ctilinea, ou abſolutamente huma *Pyramide*; cuja *Baſe* he o ditto plano BD, e cujo *Vertice* he o ponto A * A baſe da pyramide pode ſer qualquer polygono: porem os lados ſempre hande ſer triangulos.

§ Aſſim como o triangulo he a mais ſimplez figura das planas rectilineas, e em que todas ellas ſe reſolvem; aſſim a pyramide triangular (iſto he, a q̃ tem por baſe hum triangulo) he a mais ſimplez figura das ſolidas, tambem rectilineas, e em que todas ellas, &c.

Fig. 2 3. 2. Se fora de qualquer circulo CO, ſe tomar hum ponto A, do qual ſe circunvolva huma recta AC, ao redor do meſmo circulo; ſerà o ſolido aſſim comprehendido huma *Pyramide Conica*; cuja *Baſe* he o meſmo circulo CO, o *Vertice* o ponto A, o *Lado* a recta AC, e o *Exo* a recta AO, tirada do vertice ao centro do circulo. * A *Pyramide Conica*, ou he recta, ou eſcalena: a recta tem o *Exo* perpendicular â baſe; a eſcalena inclinado.

Fig. 4. 5. 3. Se ao redor de dous circulos iguaes, e parallelos ſe circunvolver huma recta BC; ſerà o ſolido aſſim comprehendido hum *Cylindro*; cujas *Baſes* ſão os dittos circulos, o *Lado* a recta BC, e o *Exo* a recta AO, tirada de hum centro a outro. * Tambem o *Cylindro*, ou he recto, ou eſcaleno, ſegundo o ſitio do *Exo*.

4. *Pyramides Conicas*, e *Cylindros Semelhantes*; ſão os que tem os *exos*, e *diametros* das baſes proporcionaes; e alem diſto iguaes as inclinaçóes dos meſmos *exos*.

5. *Esfera*: he hum ſolido comprehendido com huma unica ſuperficie, dentro do qual ha hum ponto, do qual todas as rectas, que ſe tirão â ditta ſuperficie ſão iguaes. Eſte tal ponto ſe chama *Centro*; e a recta que paſſando por elle, ſe termina de huma, e outra parte na meſma ſuperficie, ſe chama *Diametro*. * A *Esfera* cõſidera-ſe ſer gerada da circunvoluçáo de hum ſemicirculo ſobre o ſeu diametro.

6. Se

6. Se em huma figura se inscreverem muitas outras, mayores, e mayores, sem que jà mais cheguem a ser iguaes a ella: ou tambem, se a huma figura se circunscreverem muitas outras, menores, e menores, sem que jà mais cheguem a ser iguaes a ella; tanto humas como outras (inscriptas, e circunscriptas) se dizem *Acabar*, ou *Fenecer* na ditta figura. Isto he, de tal sorte crescem as inscriptas, e decrescem as circunscriptas, que dada qualquer quantidade, por menor que seja, sempre o defeito das primeiras, ou excesso das segundas, he menor que qualquer assignado.

* Este he o 3. principio, em que se funda a Geometria para penetrar os mais reconditos segredos da Quantidade.

O 1. como dissemos no *Ax.7.* do L. 1. he a total correspondencia, ou coherencia das figuras.

O 2. he a igualdade, ou semelhança das razões, como se vê em todo o 5. e 6. livro.

O 3. he esta mutua approximação de humas figuras a outras: a qual serve particularmente para as quantidades incommensuraveis, e que só por este meyo se podem comparar.

PROPOSIÇÃO I. *Theorema.*

A razão que tem quaesquer polygonos semelhantes inscriptos em 2. circulos, he sempre duplicada da dos diametros dos mesmos circulos. Fig. 6. 7.

DEm. Os polygonos semelhantes FHO, ADQ, são em duplicada razão de quaesquer lados correspondentes GF, BA (20.6.) porem estes tem sẽpre a mesma razão, que os diametros dos circulos circunscriptos FP, AE: e provo. Tirem-se no primeiro circulo as rectas HF, GP (a primeira subtensa de qualquer angu-

 lo;

lo; e a ſegunda terminada no meſmo angulo, e na extremidade do diamerro) e no ſegundo as rectas DA, BE. Nos triangulos HGF, DBA, os angulos G, B, ſão iguaes, e os lados, que os comprehendem, proporcionaes (*Def.* 1.6.) logo os angulos H, D, ſão iguaes (6.6.) logo nos triangulos GFP, BAE, os angulos P, E, inſiſtentes nos meſmos arcos, com os antecedentes, ſão tambem iguaes (21.3.) Porem tambem ſão iguaes nos meſmos triangulos os angulos G, B, por ſerem rectos (31.3.) e por conſequencia os remanentes F, A (*Cor.* 9. *da* 32. 1.) logo os lados dos dittos triangulos ſão reſpectivamente proporcionaes (4.6.) e por conſequencia GF : BA = FP : AE. Logo ſendo os polygonos em duplicada razão dos primeiros, o ſerão tambem dos ſegundos. *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

OS ambitos, ou perimetros dos dittos polygonos ſão tambem proporcionaes com os meſmos diametros.

Dem. GF : BA = FP : AE; item HG : DB = FP : AE; e aſſim dos mais lados: logo todos os do primeiro polygono (iſto he, o ambito FGH, &c.) ſão para todos os do ſegundo (iſto he, para o ambito ABD, &c.) como FP para AE (12.5.) *Q. E. &c.*

Lemma. I.

Os polygonos inſcriptos em hum circulo Fenecem *nelle.*

Fig. 2. DEm. Inſcreva-ſe no ditto circulo o quadrado CADB: ſerà o remanente; iſto he, as 4. lunetas COA, AQD, &c. menos que a metade do ditto circulo

culo: porquanto, ſendo o quadrado inſcripto metade do circunſcripto (*Eſcb. da 6. do* 4.) e eſte mayor que o circulo, neceſſariamente hade ſer mayor, que a ſua metade. Inſcreva-ſe deſpois o octagono COAQD,&c. He ſem duvida, que os exceſſos do ditto octagono ſobre o quadrado, (iſto he, os 4. triangulos COA, AQD, &c.) tambem ſão mayores, que a metade das 4. lunetas: porquanto, tirada pelo ponto O, a tangente EF e produzidos os lados do quadrado inſcripto; o triangulo COD, he metade do rectangulo CF (41. 1.) e eſta mayor que a luneta correſpondente, &c. Logo, ſe do meſmo modo ſe forem dobrando os lados das figuras inſcriptas, ſempre ſe irà tirando mais, e mais que a metade do remanente; e por conſequencia virſe-ha a hum defeito tam pequeno, que ſeja menor que qualquer aſſignado; que he o meſmo, que ***Fenecerem*** as figuras inſcriptas no circulo, conforme a *Def. 6.*

PORISMA UNIVERSAL.

Se quaeſquer figuras inſcriptas, e ſemelhantes fenecerem em outras, guardando ſempre entre ſi a meſma razão; eſta meſma terão as figuras, em que fenecem.

R	:	
A	:	B.
X	:	*Z*.
C	:	D.

D*Em*. Sejaõ as figuras A, B, aquellas, em que fenecem as inſcriptas; e ſeja (X:Z) a razão, que ſempre guardão entre ſi quaeſquer inſcriptas ſemelhantes: Digo que tambem A he para B, como X para Z. Se o não he, ſeja v.g. A para B, em mayor razaõ, que X para Z; e por conſequencia, tomada outra qualquer R, menor que A, ſeja R : B = X : Z (10. 5.) He ſem duvida, que ſe podem inſcrever em A, e B, tantas figuras ſemelhantes mayores, e mayores, que ſeja huma dellas C, inſcripta em A (a quem correſponde

de D, inscripta em B) mayor que R; isto he, cujo defeito a respeito de A, seja menor que o de R, a respeito do mesmo A (*Lem. ant.*) Isto supposto: porquanto R : B = X : Z (*Constr.*) e C : D = X : Z (*Hyp.*) será R : B = C : D (11. 5.) e permutando, será R : C = B : D; porem B, he mayor que D (por ser circunscripta a respeito da inscripta) logo tambem R, he mayor que C, contra a supposição.

PROPOSIÇÃO II. *Theor.*

Os circulos são entre si em duplicada razão dos seus diametros.

DEm. Consta facilmente do ditto: porquanto, os polygonos semelhantes fenecem nos circulos (*Lem. ant.*) e tem sempre entre si a mesma razaõ; isto he, duplicada dos diametros (1.) logo tambem os circulos terão a mesma razão, pelo *Porisma universal.* *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO III. e IV.

São prolixas; e não tem mais uso, que para demonstrar a quinta, a qual sem ellas se demonstra mais facilmente pelos 2. Lemmas seguintes.

Lemma II.

Se à duas pyramides triangulares cortarem dous planos parallelos às bases, de sórte que cortem tambem proporcionalmente quaesquer lados dellas; serão as secções entre

entre si como as bases : isto he, serà HCD : TQN = FGB : RSX. Fig. 9. e 10.

DEm. Porquanto aos planos FAG, GAB, FAB, cortão os 2. planos parallelos FGB, HCD, serão as secções FG, HC; GB, CD; FB, HD, respectivamente parallelas (16. 11.) logo tambem os angulos H, C, D, são respectivamente iguaes aos angulos F, G, B (10. 11.) e por consequencia a secção HCD, he semelhante â base FGB: o mesmo digo da outra secção TQN, &c. Porèm HCD, he para FGB, em duplicada razão de CD à GB (19. 6.) isto he, de AD, à AB (*Cor. da* 4 *do* 6.) isto he, de MN à MX (*Hyp.*) isto he, de QN à SX; de quem tambem he em duplicada razão TQN para RSX (19. 6.) logo HCD : FGB = TQN : RSX (35. 5.) e alternando, HCD : TQN = FGB : RSX (16. 5.) *Q. E. &c.*

Lemma III.

Os prismas inscriptos, e circunscriptos âs pyramides triangulares, fenecem nellas.

DEm. Divida-se qualquer lado AG, de huma pyramide triangular, em quaesquer partes iguaes; e tirem-se pelos pontos das divisões B, D, planos parallelos â base OBQ, FDN. Dos pontos O, Q; F, N, tirem-se outras tantas parallelas ao mesmo lado AG; e juntos os termos destas com as rectas CE, LT, imaginem-se inscriptos na pyramide os prismas OBQEDC, FDNTGL. Fig. 16.

Do mesmo modo : produzidos os lados dos dittos planos, e levantadas as perpendiculares necessarias, imaginem-se circunscriptos â ditta pyramide os prismas VABQO, PBDNF, HDGSR. Serà este ultimo o excesso de todos os circunscriptos sobre os inscripto

[por-

[por ser VB, igual à OD; e por consequencia PD, a summa dos 2. primeiros excessos: item PD, igual à FG; e por consequencia HG, a summa de todos 3. &c.] Porèm dividido o lado AG, em aliquotas menores, e menores, este excesso vay sendo sempre de cada vez menor, atè ser menor que qualquer assignado; e com muito mais razaõ o excesso dos mesmos prismas sobre a pyramide (como he manifesto) logo os prismas circunscriptos fenecem na ditta pyramide (*Def. 6.*) *Q.E.&c.* * O mesmo digo dos inscriptos; por ser o defeito sempre menor, &c.

PROPOSIC,ÃO V. *Theor.*

Fig. 11. e 12. ***As pyramides triangulares igualmente altas, são entre si como as bases.***

DEm. Dividão-se as alturas RG, AB, em igual numero de aliquotas; e pelos pontos das divisões tirem-se planos parallelos âs bases; e inscrevão-se prismas como no *Lem. ant.* Porquanto os prismas GPQO, BYDC, são igualmente altos; serà o primeiro para o segundo, como a base para a base (*Cor.* 1. *da* 34. *do* 11.) isto he, como PQO para YDC; ou como GHL para para BFE (*Lem.* 2.) porèm pelo mesmo discurso, todos os prismas correspondentes são entre si na mesma razão: logo a summa dos inscriptos na primeira pyramide he para a summa dos inscriptos na segunda, como a base para a base (12. 5.) Porèm os dittos prismas fenecem nas dittas pyramides (*Lem.* 3.) logo tambem estas serão entre si como as bases (*Por. universal.*) *Q. E. &c.* * A Dem. sempre he a mesma, ou as pyramides sejão rectas, ou inclinadas.

PROPO-

PROPOSIÇÃO VI. *Theor.*

Quaesquer pyramides igualmente altas são entre si como as bases.

DEm. Resolvão-se as bases em triangulos X, Z, Y; P, Q; e as pyramides multilateras em triangulares. A pyramide XA, he para a pyramide PB; como X para P (*Ant.*) Item, a mesma XA, he para a pyramide QB; como X para Q: logo XA : PB+QB = X : P+Q (12.5.) Do mesmo modo mostrarey, ser PB+QB : XA+ZA+YA = P+Q : X+Z+Y: logo &c. Fig. 13. e 14.

PROPOSIÇÃO VII. *Theor.*

Toda a pyramide he a terceira parte do prisma, que tem com ella a mesma base, e altura.

DEm. Seja 1. a pyramide DCGO, triangular; a qual tenha a mesma base, e altura como prisma DCGBEA. Tirem-se as rectas AC, CB, BD; e considere-se dividido o prisma em 3. pyramides. Porquanto os triangulos DBG, DBA, são iguaes (34.1.) serão as pyramides DBGC, DBAC, tambem iguaes (5.) porem, pela mesma razão, as pyramides CAEB, CADB (isto he, a mesma pyramide DBAC) tambem são iguaes: logo todas as 3. pyramides, em que està dividido o prisma, são iguaes entre si; e por consequencia cada huma dellas he a terceira parte do mesmo prisma. Porém a proposta DCGO, he igual à DCGB (ou DBGC) logo tambem esta he a terceira parte do mesmo prisma. *Q. E &c.* Fig. 15.

Seja 2. multilatera a ditta pyramide GRC. Resolva-se o prisma AR, em prismas triangulares, como tambem a pyramide, &c. Consta da primeira par- Fig. 17.

te, que todos os prismas triangulares são triplos das pyramides correspondentes: logo tambem o prisma multilatero será triplo da pyramide multilatera. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO VIII. *Theor.*

As pyramides semelhantes são em triplicada razão dos seus lados homologos, ou correspondentes.

Fig. 19. e 20. DEm. Sejão 1. trigonas as pyramides propostas CBAE, ONMR. Dupliquem-se os triangulos das bases; e formem-se sobre os parallelogrammos AD, MP (34.1.) os parallelipipedos AH, MT, da mesma altura com as pyramides. Como estas se suppoem semelhantes, o serão tambem os dittos parallelipipedos (*Def.* 9. 11.) e como, dividido cada parallelipipedo em 2. prismas (28. 11.) cada pyramide he a terceira parte do seu prisma (*Ant.*) será tambem a sexta de cada parallelipipedo: logo serão as pyramides entre si, como os parallelipipedos (15. 5.) porèm estes são em triplicada razão dos seus lados homologos (33. 11.) os quaes são communs a ambos os solidos: logo tambem aquellas. *Q. E. &c.*

Fig. 21. e 22. Sejão 2. polygonas as dittas pyramides RSTV, XZYS. Resolvão-se as pyramides propostas em outras trigonas; as quaes facilmente se mostra que são respectivamente semelhantes (pela 20. e 5. do 6: e pela *Def.* 9. do 11.) porèm estas, pela primeira parte, são em triplicada razão de quaesquer lados homologos: logo tambem aquellas &c.

PROPOSI-

PROPOSIÇÃO IX. *Theor.*

As pyramides iguaes tem as bases, e alturas reciprocamente proporcionaes. E se as tem reciprocamente proporcionaes, são iguaes.

DEm. 1. part. Sejão 1. as pyramides trilateras OQPM, CBAF. Formados, e divididos, como na *Ant.* os parallelipipedos PT, AG; serão estes sextuplos das pyramides iguaes; e por consequencia iguaes: logo reciprocarão as bases com as alturas (34.11.) isto he, será a altura PM para AF; como a base AD, para a base PR: porèm as alturas dos parallelipipedos são as mesmas que as das pyramides, e as bases duplas daquellas (34.1.) logo tambem as pyramides reciprocarão do mesmo modo &c. Fig. 21. e 24.

Sejão 2. multilateras &c. Reduzidas as bases polygonas a 2. triangulos respectivamente iguaes; e formadas 2. pyramides trigonas com as mesmas alturas; serão as trilateras, e multilateras respectivamente iguaes (6.) porèm as primeiras reciprocão as bases com as alturas: logo tambem as segundas.

2. Part. Porquanto OQP : CBA = AF : PM (*Hyp.*) serà tambem PR : AD = AF : PM; logo os parallelipipedos PF, AG, são iguaes (34.11.) logo tambem as suas sextas partes; isto he, as pyramides &c.

COROLLARIOS.

O que dissemos das pyramides nas 3. Proposições antecedentes, 6. 8. e 9. se entende tambem de quaesquer prismas, que tiverem com ellas as mesmas bases, e alturas; por serem triplos dellas (7.) Pelo que

1. Os prismas igualmente altos são entre si como as bases.

2. Os priſmas ſemelhantes ſão em triplicada razão dos lados homologos.

3 E os priſmas iguaes reciprocão as baſes com as alturas: e ſe as reciprocão, ſão iguaes.

ESCHOLIO.

DO ditto ſe infere hum modo facil de medir quaesquer priſmas, e pyramides; com tanto que ſejão conhecidas as baſes, e as alturas em qualquer medida vulgar: porquanto multiplicando hum numero por outro, ſahirá o priſma; e multiplicando hum numero pella terceira parte do outro, ſahirá a pyramide. V. g. conſte a baſe POV, de 25. palm. quadr. e a altura PS, de 7. ſerá a ſolidez do priſma SV, de 175. palm. cubic. e a da pyramide POVL, de 58. $\frac{1}{3}$. * Demonſtradas as proporções dos ſolidos rectilineos, ſegue-ſe agora tratar dos ſolidos curvilineos, ou circulares; para cuja theoria premitto o ſeguinte.

Fig. 12.

Lemma IV.

As pyramides, e priſmas inſcriptos nos ſolidos conicos, e cylindricos Fenecem *nelles.*

Fig. 25. DEm. As pyramides igualmente altas FGEA, FRGDEA, ſão entre ſi como as baſes (6.) porem eſtas; iſto he, os polygonos inſcriptos, fenecem no circulo (*Lem.* 1.) logo tambem aquellas fenecerão na conica, que tem por baſe o meſmo circulo. O meſmo digo dos priſmas FGEB, FRGDEB, &c. (*Cor.* 1 *da* 9.)

PROPO-

PROPOSIC,ÃO X. *Theor.*

Toda a pyramide conica FGEA, he a tercei- parte do cylindro FGEB, que tem com ella a mesma base, e altura. Fig. 25.

DEm. Inscreva-se na base do cylindro qualquer polygono regular; e sobre este se forme huma pyramide, e hum prisma; ambos da mesma altura AC, com a do cylindro: a pyramide inscripta na conica, e o prisma no cylindro, He sem duvida que a ditta pyramide he a terceira parte do prisma (7.) e que dobrando-se os lados do polygono da base, e inscrevendo-se novas, e novas pyramides; novos, e novos prismas, sempre as pyramides continuarão a ser as terceiras partes dos dittos prismas: porem as pyramides assim formadas fenecem na conica; e os prismas no cylindro (*Lem.* 4.) logo tambem a conica será a terceira parte do cylindro (*Por. universal.*) *Q.E. &c.*

PROPOSIC,ÃO XI. *Theor.*

As pyramides conicas igualmẽte altas FGEA, MPNH, são entre si como as bases. O mesmo digo dos cylindros FB, MQ.

DEm. As pyramides rectilineas inscriptas nas conicas são entre si como as bases (6.) porem as primeiras fenecem nas segundas (*Lem.* 4.) e as bases nos circulos (*Lem.* 1.) logo tambem as conicas são entre si como as bases (*Por. universal*) *Q. E. &c.* Fig. 25. e 26.

E como os cylindros são triplos das dittas pyramides conicas [*Ant.*] segue-se que tambem elles são entre si, como as bases &c.

CORO-

COROLLARIO.

DO mesmo modo se prova, que não sómente os cylindros; senão tambem quaesquer corpos cylindri-formes (ou rectos, ou escalenos) são entre si como as bases: como tambem quaesquer corpos â maneira de pyramides; isto he, que começando em hum plano vão acabar em hum ponto; com tanto que sejão todos igualmente altos.

PROPOSIÇÃO XII. *Theor.*

Fig. 25. e 26. *As pyramides conicas semelhantes* (Def. 4.) *FGEA, MPNV, são em triplicada razão dos diametros das bases FE, MN. O mesmo digo dos cylindros FGEB, MPNK*

DEm. Inscrevão-se nas bases das dittas pyramides polygonos semelhantes; e considerem-se nelles formadas pyramides rectilineas inscriptas nas conicas &c. Consta facilmente que tambem as ditas pyramides rectilineas são semelhantes; e por consequencia em triplicada razão dos lados homologos FG, MP [8.] isto he, dos diametros FE, MN [1.] porem as dittas pyramides inscriptas fenecem nas conicas [*Lem.* 4.] logo tambem estas serão em triplicada razão dos dittos diametros (*Por. universal*) Q. E. &c.

Dos cylindros consta facilmentè pela 10.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XIII. *Theor.*

Se à qualquer cylindro RE, cortar hum plano FG, parallelo á base; serà a parte do solido RG, para a outra parte FE, como a correspondente parte do exo BC, para a outra parte CA. Fig. 27.

DEm. He a mesma que a da 25. do 11. e tem força tanto no solido, como na superficie cylindrica.

PROPOSIÇÃO XIV. *Theor.*

Os cylindros MQ, RE, collocados sobre iguaes bases, são entre si como as alturas. O mesmo digo das pyramides conicas. Fig. 26. e 27.

DEm. 1. part. Sejão 1. os cylindros rectos. Cortado do mayor a parte FE, da mesma altura que o menor MQ, serà MQ = FE (11.) porem FE : RE = CA : BA (*Ant.*) logo substituindo igual por igual, serà MQ : RE = CA (ou OH) : BA.* Se são escalenos, reduzão-se a rectos &c.

2. Part. Consta da *Prop.* 10.

COROLLARIO.

O mesmo se entende de quaesquer prismas, e pyramides; para cuja demonstração serve o *Cor.* 1. da 9. e a 25. do 11. quanto ao primeiro : e esta mesma com a 7. quanto ao segundo.

PROPOSIÇÃO XV. *Theor.*

Os cylindros iguaes FB, RE, reciprocão as Fig. 25. e 27.

bases

bases com as alturas. E se reciprocão as bases com as alturas são iguaes.

DEm. He semelhante â da 34. do 11. mas em lugar da 32. e 25. do mesmo, que alli se citão, se deve citar a 11. e 13. deste.

ESCHOLIO.

N*Aõ faz menção* Euclides *da razão composta dos solidos; assim como a fez dos planos na 23. do 6. porem facilmente se lhes pode applicar a mesma doutrina. Digo pois, que os cylindros, e prismas são tambem em razão composta das suas bases, e alturas. Sejão os cylindros CCB, OOD: faça-se como a base do primeiro CC, para a base do segundo OO; assim X para Z: e como altura do mesmo primeiro CB, para a altura do segundo OD; assim Z para Y. Digo, que assim como X he para Y, assim o primeiro cylindro he para o segundo.*

Fig.28. e 28.

Dem. *Corte-se do mais alto huma parte OOG, a qual tenha a mesma altura, que o mais baixo CCB. Será CCB : OOG = CC : OO (11.) isto he, = X : Z; e será OOG : OOD = OG (ou CB) : OD (13.) isto he, = Z : Y: logo por igual, será CCB : OOD = X : Y (22. 5.) isto he, em razão composta daquellas duas razões* (Def. 18. 5.) *Q. E. &c.*

Quanto aos prismas, demonstra-se do mesmo modo; citando o Cor. *da 9. e a 14. E quanto âs pyramides (ou sejão rectilineas, ou conicas) a razão he manifesta; por serem tanto humas, como outras, terceiras partes dos prismas, e dos cylindros respectivos; pela 7. e 10. &c.*

PROPOSIÇÃO XVI. e XVII.

Não tem mais uso, que para demonstrar a 18. a qual sem ellas se demonstra mais facilmente pelo seguinte. Lem-

Lemma V.

Os cylindros inſcriptos no hemisferio fenecem *nelle.* Fig. 291

DEm. Seja *bāb.* o ſemi-circulo maximo de hum hemisferio; e divida-ſe o rayo *ae.* perpendicular ao diametro *bb.* em quaeſquer aliquotas *ag. gf. fe.* Pelos pontos das diviſões *g. f.* tirem-ſe as perpendiculares *cc. ii.* e inſcrevão-ſe no ſemi-circulo os rectangulos *pi. oc*: e produzidos os lados, circunſcrevão-ſe os outros *bq. il. ch.* Como todos eſtes rectangulos tenhão a meſma altura he manifeſto que o exceſſo dos circunſcriptos ſobre os inſcriptos (iſto he, os rectangulos *bi. ic. ch. ol. pq.*) ſão iguaes ao rectangulo *bq.* Imagine-ſe pois, que ſe circunvolve o ditto ſemi-circulo ſobre o rayo *ae.* e que tanto elle, como os rectangulos inſcriptos, e circunſcriptos produzem hum hemisferio todo cheyo de cylindros inſcriptos, e circunſcriptos: tambem he evidente, que o exceſſo dos primeiros ſobre os ſegundos, he igual ao cylindro *bq.* porem a altura deſte pode ſer menor que qualquer aſſignada; e por conſequencia o meſmo cylindro: logo o exceſſo dos cylindros circunſcriptos ſobre os inſcriptos, e muito mais o do hemisferio ſobre os meſmos inſcriptos, pode ſer menor que qualquer aſſignado; e por conſequencia os dittos cylindros inſcriptos fenecem no hemisferio (*Def.* 6.) *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

DO meſmo modo ſe demonſtra, que os cylindros inſcriptos nas pyramides conicas, nas conoïdes, e esferoïdes, fenecem nellas.

PROPOSIÇÃO XVIII. *Theor.*

As esferas são em triplicada razão dos seus diametros.

DEm. Dividão-se os rayos EA, XD, em igual numero de aliquotas; e inscrevão-se em hum, e outro hemisferio outros tantos cylindros, como no *Lem. ant.* Porquanto PG, CG, GA, são continuamente proporcionaes (*Cor. da* 13. 6.) serà PG para GA, em duplicada razão de CG para GA (*Def.* 10. 5.) assim como SM para MD, em duplicada razão de RM para MD: porem PG : GA = SM : MD (por serem os antecedentes equi-multiplices dos consequentes) logo CG : GA = RM : MD (35. 5.) isto he (pela igualdade das aliquotas) serà CG : GF = RM : MN: logo os cylindros CO, RQ, são semelhantes (*Def.* 4.) e, por consequencia em triplicada razão dos diametros das bases (12.) ou dos semi-diametros CG, RM. Porem estes mesmos semi-diametros das bases são entre si como os diametros das esferas AP, DS [pelas 18. 22. e 16. do 5.] logo os dittos cylindros CO, RQ, são tambem em triplicada razão dos dittos diametros. Porem, pelo mesmo discurso, esta mesma triplicada razão dos diametros das esferas, tem todas os cylindros correspondentes, inscriptos nas mesmas esferas: logo, tenecendo estes nellas (*Lem. ant.*) tambem ellas terão a mesma razao (*Por. universal*) *Q. E. &c.*

Fig. 30. e 31.

COROLLARIO.

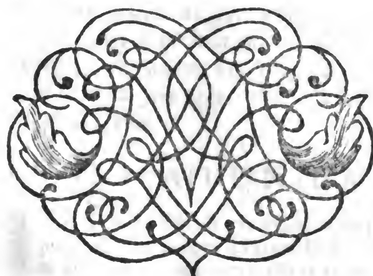
COnhecida a proporção dos diametros de quaesquer esferas, facilmente se conhecerà a das mesmas esferas; se se continuar por 4. termos a mesma razão, e se comparar o primeiro termo com o quarto. V.g.

V.g. ſeja o diametro BB de 27. palmos, e ZZ de 18. e continue-ſe por 4. termos aquella razão (27. 18. 12. 8.) Digo, que a razão da primeira para a ſegunda esfera, he como 27. para 8. * *O modo de medir as esferas, cylindros, e pyramides conicas, daremos abaixo no Appendiz 2. dos Selectos de* Arquimedes.

ESCHOLIO.

ASſim como os planos ſemelhantes ſe augmentão, ou diminuem em qualquer razão dada, por meyo de huma media proporcional; aſſim tambem os ſolidos ſe augmentão, ou diminuem por meyo de duas; da maneira ſeguinte. Dê-ſe qualquer ſolido [regular, ou irregular] cujo lado, ou diametro ſeja A; e queira-ſe outro ſemelhante para o qual tenha a razão de P para Q. Faça-ſe como P para Q, aſſim A para B; e buſquem-ſe entre A, e B duas medias proporcionaes X, Z: Digo que o ſolido ſemelhante à A, que tiver por lado homologo, ou diametro, huma recta igual à X, ſerá o que ſe buſca. He invenção de Hippocrates; *e com que ſe ſatisfaz ao Oraculo Deliaco.*

A : X : Z : B
P : Q







ELEMENTOS DE GEOMETRIA

LIVRO IX. OU XIII.

NESTE LIVRO (O QUAL, COMO diſſe no Prologo, he o ultimo de Euclides*) ſe trata da inſcripção dos Polyëdros Regulares na Esfera, aſſim como no 4. da dos Polygonos no Circulo. A materia não he muito neceſſaria aos Practicos; porem para os Theoricos, eu a julgo de ſumma importancia: pois àlem de ſer engenhoſiſſima, com ella ſe poem a ultima mão â Geometria Elementar; e ſe fazem referir todos os Corpos Regulares ao ſeu objecto de Attribuição, qual he a Esfera.*

DEFINIÇÃO UNICA.



RECTA DC, ſe diz *Poder* o duplo, triplo, ou quadruplo da recta DA; quando o quadrado, que ſobre ella ſe forma, DF, he duplo, triplo, ou quadruplo, do que ſe forma ſo bre a outra recta, DO.* Iſto meſmo ſe co- Fig. 1.

ſtuma

ftu na explicar por eftes termos: DC, he em *Potencia* dupla, tripla, ou quadrupla de DA.

Lemma.

Se cortado o lado AB, de qualquer quadrado, Fig. 2. *em quaesquer pontos D, C, se tirarem delles rectas perpendiculares ao ditto lado, DR, CL; e pelos pontos O, Q, em que as dittas perpendiculares occorrem â diagonal BE, se tirarem parallelas ao mesmo lado, NH, KI: serão os parallelogrammos NR, VG, CI, existentes sobre a ditta diagonal, quadrados daquellas partes, que lhes correspondem no lado cortado, AD, DC, CB.*

D*Em.* Confta da 34. do 1. e do *Corollario* 11. da 32. do mefmo.

PROPOSIÇÃO I. *Theorema.*

Fig. 1. *Se se cortar a recta AB, em media, e extrema razão no ponto C* (30.6.) poderâ *o mayor segmento AC, junto com a metade da toda, ou com sua igual DA, o quintuplo da mesma metade: isto he, serà o quadrado DF = 5 DO.*

D*Em.* Forme-fe fobre DC, hum quadrado; e outro fobre AB; e continue-fe o lado FC, atè N; e o lado GA, atè H. Pelo ponto O, em que efte fegundo lado occorre â diagonal do primeiro quadrado, tire-fe huma parallela ZK.

Porquanto o Rect. ABC = Quad. AC (*Hyp.*) ferà

ſerà CL = HK (*Lem. ant.*) e porquanto os RRect. EO, OC, ſão iguaes entre ſi (43. 1.) e qualquer delles metade de AN (por ſer AC commum, e AO metade de AG) ſerà o gnomon ZX = Quad. AL. Porem AL = 4DO (20. 6.) logo tambem ZX = 4DO; e por conſequencia o quadrado DF = 5 DO. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO II. *Theor.*

*Se DC, poder o quintuplo de DA; dividida a dupla da ditta DA (iſto he AI) em media e extrema razão, ſerà o mayor ſegmento AC, o que junto com DA, compoem a ditta recta DC.** He converſa da ant. Fig. 1.

DEm. Continue-ſe a recta dada DC, atè que AB, ſeja dupla de DA; e formem-ſe, e dividão-ſe como arriba os dous quadrados DF, AL. Porquanto DF, he quintuplo de DO (*Hyp.*) ſerà o gnomon ZX, quadruplo do meſmo DO: logo o gnomon ZX = Quad. AL. (20. 6.) Porem, por ſer AB dupla de DA, e igual à AG, tambem AG he dupla de DA, ou de AO, ſua igual, e por conſequencia o Rect. AN, he duplo de OC, e igual aos 2. RRect. EO, OC (43. 1.) logo o remanente Rect. CL, he igual ao remanente Quad. HK; iſto he (pela igualdade das rectas) o rectangulo ABC, he igual ao quadrado AC; e por conſeq. a recta AB, eſtà cortada em C, em media, e extrema razão (30. 6.) *Q. E. &c.*

PROPO-

PROPOSIÇÃO III. *Theor.*

Fig. 2. *Se se cortar huma recta AB, em media, e extrema razão no ponto C;* poderà *o menor segmento CB, junto com a metade do mayor DC, o quintuplo da ditta metade.*

DEm. Forme-se o quadrado AF, e divida-se como no *Lem. ant.* Porquanto o Rect. ABC, ou CF, he igual ao Quad. AC, ou KL (*Hyp. e Lem.*) e o Quad. KL, he quadruplo do Quad. VG (20.6.) serà o Rect. CF, quadruplo do mesmo Quad. V.G: porem o Rect. CF, he igual ao gnomon XZ [por ser CH cõmum, e DO igual à GF, pela igualdade dos lados] logo o gnomon XZ he tambem quadruplo do mesmo Quad. VG; e por conseq. o Quad. DH he quintuplo do mesmo: isto he, a recta DB (composta da metade do mayor segmento, e do menor) *poderà* o quintuplo da ditta metade DC. *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

NAõ faz menção Euclides *da conversa desta Proposição, como nem das conversas das 2. seguintes; talvez porque vio, que a demonstração da antecedente se podia facilmente applicar a qualquer dellas, como o fez* Campano, e Clavio.

PROPOSIÇÃO IV. *Theor.*

Fig. 3. *Se AB, for cortada em C, em media, e extrema razão; serà o quadrado da toda junto com o quadrado do menor segmento CB,*

3. ve-

3. vezes mayor, que o quadrado do mayor ſegmento AC.

DEm. O Rect. ABC, ou AD, he igual ao Quad. AC, ou EG (*Hyp. e Lem.*) porem AD, he igual à CF: logo os 2. rectangulos AD, CF; iſto he o gnomon XZ, junto com o quadrado CD, ſão duplos do quadrado EG: logo accreſcentando ao ditto gnomon o meſmo quadrado EG, ſerà o quadrado AF, junto com o quadrado CD, triplo do quadrado EG. *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

FRranciſco Maurolyco *accreſcenta aqui hum Theor. muito engenhoſo, que he o ſeguinte.* Se AB, for cortada em C, em media, e extrema razão, *poderà* a compoſta da toda, e do menor ſegmento CB, o quintuplo do mayor AC. Fig. 44

Dem. *Continue-ſe AB, atè que BD, ſeja igual à CB. Porquanto à recta CD, cortada pelo meyo em B, ſe lhe accreſcentou a recta AC, ſerà o rectangulo ABD, tomado 4. vezes, juntamente com o quadrado AC, igual ao quadrado AD* (8.2.) *Porem o rectangulo ABD, ou ABC, he igual ao quadrado AC* (Hyp.) *logo o* Q*uad. AD* = 5. Q*uad. AC. Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO V. *Theor.*

Se cortada AB em C, em media, e extrema razão, ſe lhe accreſcentar DA, igual ao mayor ſegmento AC; ficarà a compoſta DB, tambem cortada em media, e extrema razão no ponto A: ſendo o ſeu mayor ſegmen- Fig. 7.

 to

to a mesma dada AB, e o menor a accrescentada DA.

DEm. Formem-se os 2. quadrados DK, AQ; e divida-se o segundo pelo *Lem. ant.* O Rect. ABC, ou KQ = Quad. AC, ou DK: logo accrescentando a ambas as partes o Rect. commum AG, será o Rect. DG = Quad. AQ: isto he, será DB : AB = AB : DA (17.6.) logo a composta DB, está cortada em A, em media, e extrema razão (30.6.) *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO VI. *Theor.*

Fig. 6. *Se a recta AB, for Racional (como se suppoem qualquer recta, que não diz respeito à outra) e estiver cortada em media, e extrema razão no ponto C; serão os 2. segmentos AC, CB, as Irracionaes chamadas* Apotomes.

DEm. Accrescente-se à AB, a sua metade DA; Por ser AB, Racional, tambem o será DA: logo ambas se podem exprimir por numeros, tanto em longitud, como em potencia. Porem, por ser o *quadrado* DC, quintuplo de DA (1.) tambem estes se podem exprimir por numeros, a respeito das mesmas unidades: logo as 3. rectas AB, DA, DC, são Racionaes em potencia; e as 2. primeiras em potencia, e *em* logitud. Porem por ser o Quad. DC, para o *quadrado* DA, como 5. para 1, ou 25. para 5. (isto he, como numero quadrado, para não quadrado) as suas raizes são incommensuraveis [*Cor. da* 24. 8.] logo, supposto que DA, he Racional, o residuo AC, será Irracional *Apotome* (74. 10.) *Q. E. &c.*

Item: por ser o Rect. ABC = Quad. AC, applicado o quadrado da *Apotome* AC, à Racional AB, ficará o resi-

o residuo CB, tambem *Apotome Primeira* (98. 10.) *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

E*Sta Proposição não se pode entender bem, sem alguma luz do livro* 10. *porem por se não omittirem as ultimas Proposições deste livro, em que* Euclides *faz menção destas incommensurabilidades, a quiz pôr a que pelo modo mais claro, que me foy possivel. Veja-se o* Esch. *da* 11. *do* 2.

PROPOSIÇÃO VII. *Theor.*

Se em hum pentagono equilatero ABCDE, se derem 3. angulos iguaes (ou sejaõ os conjunctos A,B,C, ou os descontinuados A,C,E) serà o ditto pentagono totalmente equiangulo. Fig. 51

DEm. 1. cazo. Tirem-se as subtensas BE,AC,BD: e do ponto O, em que as 2. primeiras se cortão, tire-se a recta OD. Porquanto os triangulos BAE, BCD, tem os angulos A,C, iguaes; e iguaes os lados, que os comprehendem (*Hyp.*) serão os angulos AEB, CDB, iguaes; e iguaes as bases BE,BD (4. 1.) logo no triangulo isosceles DBE, serão tambem iguaes os angulos sobre a base BED,BDE (5. 1.) e por conseq. os totaes E,D.

Porèm estes mesmos angulos são iguaes a qualquer dos 3. que se suppoem iguaes A,B,C: porquanto, pelo discurso arriba, os triangulos BAE, ABC, são totalmente iguaes: logo o triangulo BOA, he isosceles (6. 1.) logo tiradas de iguaes BE, AC, as iguaes BO, AO, as remanentes OE, OC, serão iguaes: logo os triangulos OED, OCD, são respectivamente equilateros, e equiangulos (8.1,) Porèm pe-

 la

la igualdade dos dittos triangulos BAE, ABC, os angulos parciaes AEB, BCA, são iguaes: logo tambem o serão os totaes E, C: e pelo mesmo discurso, o ultimo D. *Q. E. &c.*

2. Cazo: supposto que são iguaes os angulos A, C, o serão tambem, pelo discurso arriba, os outros 2. E, D: porem E, tambem se suppoem igual à A: logo os 3. conjunctos A, E, D, são iguaes; e por consequencia todos 5. &c.

PROPOSIÇÃO VIII. *Theor.*

Fig. 9. *Se 2. rectas DB, GE, subtenderem 2. angulos conjunctos de qualquer pentagono regular; cortarse hão mutuamente em media, e extrema razão. E qualquer dos maiores segmentos EO, serà igual ao lado do ditto pentagono.*

DEm. Circunscreva-se hum circulo ao pentagono (14. 4.) e sejão os arcos AB, BG, &c. iguaes (26. 3.) serà o triangulo DOG, isosceles (29. 3. e 6. 1.) logo o angulo externo EOD, he duplo do interno ODG, ou BDG (32. 1.) porem tambem he duplo do mesmo angulo o angulo EDO, ou EDB, por insistir em hum arco duplo do primeiro (33. 6.) logo o triangulo DEO, he isosceles; e por consequencia o segmento mayor EO, he igual ao lado do pentagono ED, que he a 2. parte da *Prop.*

Quanto â 1. Os triangulos DOG, EDG, são isosceles; e o angulo nas bases DGE, he commum: logo os dittos triangulos são semelhantes (*Cor. 9 da 32. 1. e 4. do 6.*) logo EG : DG = DG : OG; isto he, substituindo iguaes, EG : EO = EO : OG. *Q. E. &c*

PRO-

PROPOSIÇÃO IX. *Probl.*

Se se compuzerem os lados do decagono AB, e do hexagono BD (inscriptos no mesmo circulo) ficarà a composta AD, cortada em B, em media, e extrema razão. Fig. 10.

D*Em.* Tirem-se do centro C, as rectas CA, CB, CD. O triangulo ACB, he isosceles, e o angulo BCE, quadruplo do vertical ACB (*Hyp.*) po èm o mesmo BCE, he igual aos 2. da base BAC, ABC (32. 1.) logo qualquer delles ABC, serà duplo do mesmo vertical ACB. Porem, por ser tambem isosceles o triangulo CBD (*Cor.* 1. *da* 15. *do* 4.) tambem o externo ABC, he duplo do da base BDC: logo nos triangulos ACB, ADC, os angulos verticaes, indicados com as mesmas letras, são iguaes. He tambem commum a hum, e outro triangulo o angulo BAC: logo os dittos triangulos são respectivamente equiangulos; e por consequencia AB : AC = AC : AD (4. 6) isto he, substituindo iguaes, AB : BD = BD : AD: logo AD, està dividida em B, em media, e extrema razão. *Q. E &c.*

ESCHOLIO.

N*Aõ serà fóra do assumpto demonstrar aqui com* Campano *a conversa desta* Prop. *para dar segundo exemplo ás conversas das antecedentes.*

Se dividida AD, em media, e extrema razão, for o mayor segmento BD, lado de hum hexagono; serà o menor AB, lado do decagono, inscriptos no mesmo circulo. E se o menor for lado do decagono, serà o mayor do hexagono, &c.

Dem. 1. *part. Forme-se sobre o segmento menor AB, hum triangulo isosceles com o intervallo do mayor BD;*

(des-

e descripto do vertice C, hum circulo, tire-se o diametro AE, e a recta CD. Porquanto AB : BD = BD : AD (Hyp.) *isto he, substituindo iguaes, AB : AC = AC : AD; serão os triangulos BAC, CAD (os quaes tem hum angulo A commum, e os lados que o comprehendem proporcionaes) equiangulos* (6.6.) *logo será o angulo D, igual ao angulo ACB. Porem, por ser isosceles o triangulo CBD* (Constr.) *tanto o angulo externo ABC, como seu igual BAC, são duplos do mesmo angulo D: logo o angulo externo BCE, o qual he igual a ambos juntos, será quadruplo do mesmo D; isto he, de ACB, seu igual; e por consequencia será o arco AB, a quinta parte do semicirculo ABE; e a sua subtensa lado do decagono. Q. E. &c.*

2. *Part. Applique-se AB, ao circulo ABE, de*
Fig. 11. *quem se suppoem ser lado do decagono; e para mostrar que BD, he igual a CA, rayo, ou lado do hexagono do mesmo circulo, descreva-se com o mesmo intervallo outro circulo OQP. Porquanto AD, està cortada em B, em media, e extrema razão; sendo BD (ou RO) lado do hexagono do circulo OQP, serà AB (ou OQ) lado do decagono do ditto circulo* (Part. 1.) *logo tirados os diametros AE, OP, e as rectas BE, QP, serão os triangulos ABE, OQP, totalmente iguaes* (31. *do* 3. 33. *do* 6. *e* 26. *do* 1.) *logo RO, metade de PO, será igual à CA, metade de EA: e huma, e outra igual à BD. Q. E. &c.*

PRO-

PROPOSIÇÃO X. *Theor.*

O lado BA, do pentagono regular, inscripto em hum circulo, pode *o mesmo, que os lados BZ, do Hexagono, e VA do decagono, tomados separadamente.* Fig. 13.

DEm. Corte-se o arco BA, pelo meyo em V, e tire-se o rayo VZ: torne-se a cortar VA, pelo meyo em K, e tire-se o rayo KZ: tiradas as subtensas BV, VA, tire-se huma recta do ponto V, da primeira bissecçaõ, âquelle ponto Q, em que o segundo rayo corta o lado do pentagono. Os triangulos ZBA, ZBQ, saõ equiangulos; por ser o ang. B commum, e BAZ igual à BZQ [por ser BAX, metade de BZX (20. 3.) de quem tambem he metade BZK, por insistir na metade do arco BX, como consta da construcçaõ] logo BA : BZ = BZ : BQ (4.6.) e por conseq. o Rect. BA, BQ, ou ABQ, he igual ao Quad. BZ (17. 6.)

Porém os triangulos BVA, VQA, tambem saõ equiangulos; por serem ambos isosceles (*Cor.* 1. *seg.*) e terem hum angulo sobre a base VAB, commum (*Cor.* 9. *da* 32. 1.) logo tambem BA : VA = VA : QA; e por conseq. o Rect. BA, QA, ou BAQ, he igual ao Quad. VA. Saõ pois os 2. RRect. ABQ, BAQ; isto he, o Quad. BA, do lado do pentagono (2:2.) iguaes aos QQuad. BZ, VA, dos lados do hexagono, e do decagono. *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

1 A Recta, que tirada do centro divide pelo meyo qualquer arco BA, divide tambem pelo meyo a sua subtensa, e forma angulos rectos no ponto G, da secçaõ.

2 Odia-

2. O diametro AX, tirado de qualquer angulo A, de hum pentagono regular, divide pelo meyo o arco, e lado opposto CD. O mesmo se entende de qualquer polygono regular impar.

ESCHOLIO.

Aqui tem seu proprio lugar a Demonstr. da quella praxe de Ptolemeo, *que demos no Esch. da* 11. *do* 4. (*veja-se a Fig.* 12. *da quelle livro*) *Porquanto a recta OG, està cortada pelo meyo em L; e se lhe accrescentou a recta QO; serà o Rect. GQO + Quad. OL = Quad. QL, ou FL* (6. 2.) *porem o Quad. FL = Q Quad. FO + OL* (47. 1.) *logo, tirado o comum OL, ficarà o Rect. GQO = Quad. FO, ou OG: logo a recta QG, està cortada em O, em media, e extrema razão* (30. 6.) *e por conseq. o menor segmento QO he lado do decagono, e o mayor OG, lado do hexagono, inscriptos no mesmo circulo* (Esch. ant.) *Porèm, por ser FO = OG, a recta FQ* pode *o mesmo que QO + OG: logo he lado do pentagono inscripto no mesmo circulo,* (10.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XI. *Theor.*

Se o diametro do circulo for Racional; o lado do pentagono, nelle inscripto, serà a Irracional chamada Menor.

Fig. 14. Tirem-se os diametros AF, BG, de sorte que dividão pelo meyo os lados do pentagono oppostos CD, DE: tirem-se as subtensas AC, AG: e tome-se no semi-diametro OG, a sua quarta parte OZ; e na recta AC, a sua quarta parte CX. Como BG, he a primeira Racional, serão tambem Racionaes BO, OZ, BZ. Isto supposto.

Dem.

Dem. Os triangulos AQO, ACI, por terem o angulo A, commum; e Q, I, rectos (*Cor.* 1. *e* 2. *da ant.*) são equiangulos: logo, CI : QO = CA : OA (4.6.) ou OG: logo tomando pelos dous ultimos termos as suas quartas partes, será CI : QO = CX : OZ; e permutando, CI : CX = QO : OZ; isto he, tomando as duplas dos dous primeiros termos, CD : CQ = QO : OZ; e compondo, CD+CQ : CQ = QZ : OZ. pela qual razão serão tambem proporcionaes os seus quadrados (22.6.)

Tire-se agora a recta BD, a qual corte AC, em media, e extrema razão no ponto Y (8.) será AY = CD (*a mesma*) e será o Quad. da composta AY+CQ, ou CD+CQ, quintuplo do Quad. CQ (1.) logo tambem o Quad. QZ, será quintuplo do Quad. OZ; e por conseq. sendo OZ Racional, será tambem Racional QZ; e commensuravel com ella, ao menos em *potencia*.

Supponhamos agora que se divide BO, em 4. partes: será OZ, 1. e BZ, 5: e será o Quad. OZ, 1. e o Quad. BZ, 25. porem o Quad. QZ, he 5. como notamos assima: logo as linhas BZ, QZ, são commensuraveis em *potencia*, e incommensuraveis em longitud; por serem raizes de numeros não quadrados (*Cor. da* 24.8. *e* 9.10.) logo, se da Racional BZ, se tirar QZ, ficarà BQ, Irracional *Apotome* (74.10.) cuja *Congruente* he QZ.

Possa pois a recta BZ, mais que a recta QZ, o Quad. R: e por conseq. sendo o Quad. BZ para o Quad. QZ, como 25. para 5. ou 5. para 1. seja o Quad. R, 4: logo serão commensuraveis os quadrados BZ, e R; porem as suas raizes serão incõmensuraveis pela razão assima: logo como BZ, commensuravel em longitud com a primeira Racional BG, *possa* mais que a Congruente QZ, o Quad. R, o qual he com ella sòmente commensuravel em potencia, será BQ *Apotome quarta* (*Def.* 4. depois da 85. 10.)

Finalmente: como AB, seja media proporcional en-

tre BG, e BQ (por ser recto o angulo no semi-circulo BAG. &c.) e o Quad. AB, igual ao rectangulo BG, BQ (17. 6) segue-se que *podendo* a recta AB o rectangulo comprehendido da Racional BG, e da *Apotome quarta BQ*, será *Irracional Menor* (95. 10.) *Q. E &c.*

* Os principiantes podem omittir esta Prop. a qual só ponho, por não mutilar o texto de *Euclides* em huma propriedade tam insigne do lado do Icosaëdro.

PROPOSIÇÃO XII. *Theor.*

Fig. 15. *O lado AB, do triangulo equilatero ABC, inscripto em hum circulo, pode o triplo do rayo QD.*

DEm. Tire-se o diametro AD, e juntamente a recta BD. Porquanto o arco BD, he a sexta parte da circunferencia (*Cor.* 2. *da* 10.) será a sua subtensa igual ao rayo QD (*Cor.* 1. *da* 15. 4.) porem, por ser recto o angulo ABD (31. 3.) o quadrado AD, quadruplo de QD, ou BD (20. 6.) he igual aos quadrados AB, BD (47. 1.) logo 4. quadrados BD, são iguaes aos quadrados AB, BD; e por consequencia o quadrado AB, he triplo de BD, ou QD. *Q. E. &c.*

COROLLARIOS.

1 O Diametro he em *potencia* sequi-tercio do lado do ditto triangulo; isto he, o Quad. do diametro AD, he para o Quad. do lado AB, como 4. para 3.

2. O lado do ditto triangulo BC, corta o semi-diametro QD, pelo meyo em O. Veja-se o *Cor.* 5. *da* 15. 4.

PRO-

PROPOSIÇÃO XIII. *Probl.*

Inscrever hum tetraëdro (ou pyramide equilatera) em huma esfera. E mostrar que o diametro da ditta esfera he em potencia *sesqui-altero do lado da ditta pyramide.* Fig. 16.

COnstr. Seja RS, o diametro da esfera, em que se hade inscrever o tetraëdro; e seja MS, a sua terceira parte. Levante-se do ponto M, a perpendicular MI, atè terminar na circunferencia, e tirem-se as subtensas RI, IS. Com o intervallo MI, descreva-se hum circulo CPQO, e inscreva-se nelle hum triangulo equilatero; de cujo centro C, se levante huma perpendicular CX = RM. Tirem-se as rectas PX, QX, OX. Digo que o solido PQOX, he o tetraëdro, que se pede. Fig. 17.

Dem. Porquanto os lados XC, CP, são respectivamente iguaes aos lados RM, MI (*Constr.*) e os angulos comprehendidos rectos, serão as bases XP, RI, iguaes (4. 1.) o mesmo digo das outras duas XQ, XO: logo todas 3, são iguaes entre si. He tambem XP, igual a PQ: e provo (*Fig.* 16.) As 3. rectas RM, MI, MS, são continuamente proporcionaes (*Cor. da* 13.6.) logo o Quad. RM : Quad. MI = RM : MS (20.6.) e compondo, os quadrados RM+MI : Quad. MI = RM +MS : MS (18.5.) isto he, o Quad. RI (47.1.): Quad. MI = RS : MS. Porem RS, he tripla de MS (*Constr.*) logo tambem o quadrado RI, he triplo do Quad. MI: e por conseq. (pela igualdade das rectas) o Quad. XP, he triplo de CP. Porem tambem o Quad. PQ, he triplo de CP (*Ant.*) logo XP = PQ, &c. São pois os 4. triangulos, que compoem o solido PQOX, equilateros, e iguaes.

Formado assim o tetraëdro; passemos â sua inscri-

pção na esfera. Continue-se a perpendicular XC, atè que seja XV = RS. Porquanto MI, he media proporcional entre RM, e MS; serà CP, pela igualdade das rectas, tambem media proporcional entre XC, e CV (o mesmo se entende de CQ, e CO) logo cada hum dos 3. pontos P, Q, O, existirà na circunferencia de qualquer circulo, que tiver por diametro a recta XV (*Cor. da* 13.6.) logo, se fixo o diametro XV, se circunvolver qualquer semicirculo XPV, passarà por todos os dittos pontos, e descreverà a esfera.

Quanto â proporção do diametro para o lado. Porquanto RS, RI, RM, são continuamente proporcionaes (*Cor.* 2. *da* 8. 6.) serà o Quad. RS : Quad. RI = RS : RM (20.6.) porem RS : RM = 3 : 2 (*Constr.*) logo o diametro da esfera he em *potencia* sesqui-altero do lado do tetraëdro inscripro. *Q. E. &c.*

COROLLARIOS.

1. O Diametro da ditta esfera RS, he em *potencia* quadruplo sesqui-altero do semidiametro do circulo da base MI.

Dem. Porquanto RS, he em *potencia* sesqui-altero de RI, serà o Quad. RS : Quad. RI = 9 : 6. porem o Quad. RI : Quad. MI = 6 : 2 (por ser o Quad. RM : Quad. MI = RM : MS; isto he, 2 : 1, e o Quad. RI igual a ambos) logo por igual, serà o Quad. RS : Quad. MI = 9 : 2; isto he, serà RS, em *potencia* quadruplo sesqui-altero de MI. *Q. E. &c.*

2. A perpendicular NM, intercepta entre o centro da esfera, e a base do tetraëdro inscripto, he a sexta parte do diametro, ou a terceira do semidiametro NS, da ditta esfera.

Dem. Porquanto RS, he tripla de MS, serà RS : MS = 6 : 2; e MS : NM = 2 : 1. logo por igual, serà RS : NM = 6 : 1. &c. Daqui se segue, que RM, altu-

altura do tetraëdro, contem 2. terças do diametro da esfera circunscripta; e por conseq. que o Quad. RS, he para Quad. RM, como 9. para 4. como se infere duplicando-se a razão de 3. para 2.

ESCHOLIO.

SE se descreverem em hum papelão 4. triangulos equilateros (como mostra a Figura 12.) formarse-há com elles hum tetraëdro; o qual para que se accommode em qualquer esfera dada, se recorrerá á proporção arriba.

PROPOSIÇÃO XIV. *Probl.*

Inscrever hum octaëdro em huma esfera: e mostrar, que o diametro da esfera he em potencia *duplo do seu lado.* Fig. 16.

COnstr. Seja, como arriba, o diametro da esfera RS; e levante-se do centro N, a perpendicular NK; em cujo extremo K, concorrão as cordas RK, SK. Sobre a recta PQ = RK, forme-se hum Quad. PQOI, cujas diagonaes PO, IQ, se cortem pelo meyo em C, como se demonstrou na 8. do 4: tire-se pelo ponto C huma perpendicular VF, ao ditto Quad. a qual produzida igualmente para huma, e outra parte, seja igual â diagonal PO; e juntem-se os 4. pontos I, P, Q, O, com os 2. extremos F, V, com 8. rectas, &c. Digo que o solido assim descripto he o octaëdro, que se pede, &c. Fig. 18.

Dem. Todos os angulos em C, são rectos, ou sejão, os horizontaes, ou os verticaes; e todos os lados, que os comprehendem, são iguaes: logo tambem o serão as bases; isto he, os lados do solido: e por conseq. ficarà comprehendido com 8. triangulos equilateros, &c.

Quanto â inscripção na esfera. Porquanto quaesquer

quer rectas CF, CI, CV, são iguaes, e existem em hum plano (2.11.) descripto do ponto C, hum semicirculo, e revolvendo-se este sobre o diametro FV, passará por todos os 4. pontos I, P, Q, O; e descreverá huma esfera &c.

Quanto â proporção entre o diametro, e o *lado.* O Quad. RS = QQuad. RK, SK (47.1.) logo he duplo de cada hum: logo tambem o será o Quad. FV, a respeito de qualquer dos QQuad. PF, PV.

COROLLARIOS.

1 OS 3. planos PFOV, IFQV, IPQO, são quadrados iguaes; por constarem de lados iguaes, e angulos rectos (31.3.)

2. O octaëdro divi li-se por qualquer destes 3. planos em duas pyramides iguaes, e semelhantes (*Def.* 11. 11.)

3. Se na mesma esfera se inscrever hum tetraëdro, e hum octaëdro; será o lado do primeiro em *potencia* sesqui-tercio do segundo; isto he, como 4. para 3.

Dem. RS, he para RI, em *potencia* sesqui-altero; isto he, como 6 para 4 (*Ant.*) RS, he para RK, em *potencia* duplo; isto he, como 6. para 3. logo RI, he *para RK,* em *potencia* sesqui-tercio; isto he, como 4. para 3.

4. Todos os planos oppostos do Octaëdro são parallelos entre si.

Dem. IO, he parallela à PQ, assim como FO, parallela à PV; logo os planos, que por ellas passão *IOF*, VPQ, são parallelos entre si (15.11.) e assim dos demais.

ESCHOLIO.

SE se descreverem em hum papelão 8. *triangulos equilateros [como mostra a Fig.* 20.*] formarse-ha com elles hum octaëdro; o qual se accomodará á mes-*

ma

ma esfera, em que està inscripto o tetraëdro; se se guardar a proporção arriba.

PROPOSIÇÃO XV. *Probl.*

Fig. 16. e 19.

Inscrever hum cubo em huma esfera: e mostrar, que o diametro desta he em potencia *triplo do lado daquelle.*

COnstr. Seja o diametro da esfera RS: a sua terceira parte MS: levante-se a perpendicular MI: e tirem-se as cordas RI, SI. Sobre a recta EH = SI, forme-se hum quadrado EFGH, de cujos angulos se levantem 4. perpendiculares, todas iguaes â mesma EH; e ajuntem-se os 4. extremos destas A, B, D, C, com outras tantas rectas. Digo, que o solido assim formado he o cubo, que se pede.

Dem. Consta da 6. 11: da 33. 1: e da 10. 11. que todos os 6. planos, que comprehendem este solido, são quadrados iguaes &c. Quanto â inscripção na esfera. Tirados dous diametros em quaesquer dous planos oppostos AD, EG; BC, FH; os planos que por elles passão AEGD, BFHC, são rectangulos iguaes: e a commua secção QP, he perpendicular aos 2. oppostos (18. e 19. 11.) logo cortando-se os dittos diametros pelo meyo nos pontos Q, P; tirados outros 4. diametros interiores do cubo AG, ED; BH, FC; todos estes serão iguaes; e se cortarão pelo meyo em O (por ser v.g. no triangulo ADE, como AD para QD, assim ED, para OD, &c.) logo, se do ponto O, sobre qualquer diametro ED, se descrever hum semi-circulo, o qual se revolva sobre o mesmo diametro, descreverà huma esfera, a qual tocará todos os angulos do cubo, como he manifesto.

Agora: que esta esfera seja a mesma, que produz o semi-circulo RIS: e que o seu diametro tenha para o

lado

lado do cubo a razão assignada, demonstra-se assim. No triangulo rectang. EHG, o Quad. EG = aos QQuad. EH+HG; isto he a 2. QQuad. EH: porem no triangulo rectang. EGD, tambem o Quad. ED = aos QQuad. EG+GD: logo, substituindo iguaes, será o Quad. ED = a 2. QQuad. EH+Quad. GD; isto he, 3. QQuad. EH. Porem no semi-circulo RIS, por serem as rectas RS, SI, MS, continuamente proporcionaes, o Quad. RS: Quad. SI = RS: MS; isto he, como 3. para 1. (*Constr.*) logo sendo EH = SI, tãbem será ED = RS; e por conseq. as esferas são iguaes; e o diametro para o lado do cubo he em *potencia* triplo. *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

A Potencia do diametro da esfera, ou do cubo inscripto, he a mesma, que as duas potencias juntas do lado do mesmo cubo, e do lado do tetraëdro: isto he, o quadrado do diametro he igual aos quadrados do lado cubo, e do tetraëdro. Consta do dito; por ser a respeito do primeiro, como 3. para 1, e a respeito do segundo, como 3. para 2.

ESCHOLIO.

SE se descreverem em hum papelão 6. quadrados iguaes [*como mostra a* Fig. 24.] *formarse-há hum cubo; o qual se accommodarà na mesma esfera, se tiver a proporção assignada.*

PROPOSI-

PROPOSIÇÃO XVI. *Probl.*

Inscrever hum icosaëdro em huma esfera; e mostrar, que o lado daquelle a respeito do diametro desta he a Irracional, chamada Menor. Fig. 22. e 23.

COnstr. Seja o diametro da esfera KA: a sua quinta parte 5A: tirese a perpendicular 5O; e as cordas KO, AO. Com o intervallo AO, descreva-se hum circulo; e neste hum pentagono ABCDE: e de todos os 5. angulos se levantem outras tantas perpendiculares A*a*, B*b*, C*c*. &c. todas iguaes à mesma AO; por cujos extremos passe hum plano parallelo ao ditto circulo. Levante-se do ponto O, outra perpendicular OQ, a qual occorra ao plano superior no ponto Q; e descreva-se deste hum circulo com o mesmo intervallo AO, com que foy descripto o inferior: passarà este por todos os 5. pontos *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, como facilmente se mostra pelas mesmas Proposições, que citey arriba no principio da ant.

Dividão-se despois pelo meyo os arcos *ab*, *bc*, *cd*, &c. nos pontos G, H, K, L, F; e ajuntem-se estes 5. pontos com outras tantas rectas GH, HK, KL, &c. ficarà formado outro pentagono em tudo igual ao debaixo; porèm com os angulos encontrados; isto he, correspondendo os de sima aos meyos arcos dos de baixo; e correspondendo os debaixo aos meyos arcos dos desima. Formados assim estes dous pentagonos, e juntos os angulos correspondentes com as rectas GA, AF, FE, EL, &c. ficarão formados 10. triangulos equilateros, e iguaes; e por conseq. o tronco medio do icosaëdro.

Dem. Tire-se a perpendicular F*f*. O triangulo F*f*A, he rectang. em *f*: logo o quadrado AF, he igual aos quadrados A*f*, F*f*: porem o lado A*f*, he lado do decagono;

gono; e F*f* (igual à AO) lado do hexagono do circulo inferior: logo AF, he lado do pentagono do meſmo circulo (10.) Do meſmo modo moſtrarey, ſer FE, lado do meſmo pentagono: logo hum, e outro ſão iguaes à AE: e por conſeq. o triangulo AFE, he equilatero. O meſmo moſtrarey de todos os mais triangulos: logo todos os 10. ſão equilateros, e iguaes entre ſi. *Q. E. &c.*

Paſſemos agora âs 2. pyramides, com que ſe fecha o ditto tronco. Continue-ſe a recta OQ, para huma, e outra parte, atè que QP, OV, ſejão iguaes à A*f*, lado do decagono; e juntos os 5. angulos do pentagono ſuperior com o ponto P, e os do inferior com o ponto V, formem-ſe outros 10. triangulos &c. Digo, que tambem eſtes ſão equilateros, e iguaes aos antecedentes.

Dem. Porquanto todos angulos em Q, ſão rectos, ſerà em qualquer triangulo FQP, o Quad. FP, igual aos quadrados FQ, QP; iſto he, aos quadrados do hexagono, e do decagono: logo FP, he igual a FL (10.) O meſmo digo dos de mais lados: logo todos os 20. triangulos, que comprehendem aquelle ſolido, todos ſão equilateros, e iguaes. *Q. E. &c.*

Reſta agora demonſtrar, que eſte meſmo icoſaëdro ſe comprehende em huma esfera, cujo diametro PV, he igual à KA: e que o lado do ditto icoſaëdro he Iracional *Menor* a reſpeito do ditto diametro. Divida-ſe QO, pelo meyo em R; e tirem-ſe deſte ponto a todos os angulos da figura outras tantas rectas RD, RK, &c. He manifeſto, que todas eſtas rectas ſão iguaes entre ſi; pela igualdade dos angulos formados em Q, O, e pela igualdade dos lados, que os comprehendem. Item: ſendo QO, lado do hexagono, e OV, do decagono, a reſpeito do meſmo circulo, fica QO, dividida em O, em media, e extrema razão (9.) e por conſeq. a recta RV, compoſta da metade do mayor ſegmento, e do menor, *pode* o quintuplo de RO (3.) porem tambem RD, *pode* o quintuplo do meſmo RO (por ſer

RO,

RO, metade de OD; e ser o quadrado OD, 4. vezes mayor que o quadrado RO; e RD, igual à ambos) logo RV, he igual RD: o mesmo se entende de todas as outras rectas, tiradas do mesmo ponto R, a todos os angulos da figura. Porem por ser RV : RO = PV : QO (15.5.) tambem o Quad. RV : Quad. RO = Quad. PV : Quad. QO (22. 6.) logo sendo o Quad. RV quintuplo de RO, tambem o Quad. PV, serà quintuplo de QO, ou de AO, seu igual. Porem por ser KA, quintupla de 5. A tambem o Quad. KA he quintuplo de AO (*Cor. 2. da* 8. 6. *e* 20. 6.) logo PV, he igual à KA. *Q. E. &c.*

Quanto â proporção. PV, *pode* o quintuplo de AO: logo as dittas rectas são Racionaes, aindaque somente commensuraveis em *potencia* (*Cor. da* 24. 8.) porem AE, lado do pentagono inscripto no circulo, de quem AO, he rayo, he Irracional *Menor* a respeito do diametro do ditto circulo (11.) ou do mesmo rayo: logo tambem o serà a respeito de PV, diametro da esfera. *Q. E. &c.*

COROLLARIOS.

1. O Diametro da esfera he quintuplo em *potencia* do semi-diametro do circulo, que comprehende quaesquer 5. angulos do icosaëdro inscripto.

2. O diametro da ditta esfera he composto de hum lado do hexagono, e de dous do decagono do mesmo circulo.

3. Quaesquer dous lados oppostos de hum icosaëdro, são parallelos entre si.

Dem. GF, he parallela à *gf*: esta he parallela á CD: logo GF, CD, são parallelas (9. 11.)

ESCHOLIO.

D*Escrevão-se em hum papelão* 20. *triangulos equilateros (como mostra a Figura* 21.) *e formarse-ha com elles hum icosaëdro &c.*

PROPOSIÇÃO XVII. *Probl.*

Inscrever em huma esfera hum dodecaëdro: e mostrar que o lado deste he Irracional Apotome *a respeito do diametro da ditta esfera.*

Fig. 26.

C *Onstr.* Forme-se hum cubo pela 15. deste; e sejão os 3. quadrados, que comprehendem qualquer dos seus angulos solidos, os planos AD, DE, EA. Divida-se o quadrado interior pelo meyo com 2. rectas, GH, VQ: e o vertical fronteiro com outras 2. XZ, QP. Dividão-se em media, e extrema razão (começando do meyo) as metades de quaesquer secções contrapostas em hum, e outro plano; isto he, OZ em M: OX em N: OQ em *u*, OV em *a*: e dos 4. pontos M, N, *u*, *a*, levantem-se outras tantas perpendiculares para fora do cubo, todas iguaes ao segmento mayor: isto he, MS = OM: NR = ON: *ue* = O*u*: *ao* = O*a*. Ajuntem-se os 5. pontos R, S, D, *e*, C, com outras tantas rectas: e procedendo-se do mesmo modo pelas outras faces do cubo, descrevão-se 12. figuras rectilineas, que comprehendão hum solido [a *Figura* não exprime *mais* que 3. por evitar confusão.] Digo que o ditto solido he o dodecaëdro, que se pede; e que as dittas 12. figuras todas são pentagonos regulares, e iguaes.

Dem. Porquanto RS, he parallela à NM; e esta parallela à CD, serão as rectas RS, CD, parallelas entre si (9. 11.) logo CRSD, he hum plano. Item: por ser DQ, perpendicular às rectas QP, QV, he tambem perpendicular ao plano, que por ellas passa (6. 11.) logo os 2. triangulos QOF, *eu*Q, estão em hum plano: porem pela igualdade, e divisão das rectas, que se suppoem na *Constr.* os lados, que comprehendem os angulos rectos O, *u*, são proporcionaes; isto he, QO : OF = *eu*:

$=eu$: uQ [veja se a 2. *Figura* 26.] logo os angulos OQF, *ue* Q, são iguaes *(6.6.)* e por conseq. sendo tanto como dous rectos os 3. angulos em Q, será *e*QF, huma recta (14.1.) e a figura CRSD*e*, estará em hum plano *(1.11.)*

Temos pois que a ditta figura he absolutamente hum pentagono. Provo agora que o ditto pentagono he regular: e começando pelos lados, digo assim. Nos triangulos rectangulos DZM, DQ*u*, as bases DM, D*u*, são iguaes (4.1.) logo tambem nos triangulos, assim mesmo rectangulos DMS, D*ue*, as bases DS, D*e*, serão iguaes. Do mesmo modo mostrarey, serem tambem iguaes as outras duas bases CR, C*e*: logo as 4. rectas SD, D*e*; RC, C*e*, são iguaes de duas em duas: porem a quinta RS, he igual a qualquer das duas visinhas, v.g. à SD [e provo: os quadrados OZ, MZ; isto he, DZ, MZ; isto he, o quadrado DM, he triplo do quadrado OM (4.) logo accrescentando a ambas as partes outro quadrado OM, serão os quadrados DM, OM; isto he, DM, MS; isto he, o quadrado DS, quadruplo do quadrado OM: porem o quadrado NM, ou RS, tambem he quadruplo do mesmo quadrado OM (20.6.) logo as rectas RS, SD, são iguaes] logo todas a 5. do pentagono são iguaes entre si.

Quanto aos angulos. Porquanto OZ, està cortada em M, em media, e extrema razão; e se lhe accrescentou o mayor segmento OM, ou seu igual NO, serão os quadrados NZ, NO, triplos do quadrado OZ, ou ZD (5. e 4.) logo accrescentando a ambas as partes o mesmo quadrado ZD, serão os quadrados NZ, ZD, NO; isto he, ND, NO; isto he, ND, NR; isto he, o Quad. RD, igual a 4. quadrados ZD, ou a hum só CD: logo as 2. rectas CD, RD; e pela mesma razão tambem a terceira CS, são iguaes entre si: logo tambem serão iguaes entre si os 3. angulos descontinuados R, S, *e* (8. 1.) e por conseq. o pentagono he equiangulo (7.) *Q.E.&c.*

Quan-

Quanto â inscripção na esfera. Continuem-se os 2. planos PQV, TGH; e seja metade da sua commua secção a recta KO, a qual he parallela aos 4. lados perpendiculares do cubo, metade de qualquer delles, e equi-distante de cada hum. Tirem-se do ponto K, aos angulos do ditto cubo as rectas KE, KC, &c. e aos angulos do dodecaëdro (àlem destas) as rectas KR, KS, &c. Para mostrar que a esfera, em que està inscripto o cubo, toca tambem os demais angulos do dodecaëdro, tenho de mostrar que as rectas KC, KE, são iguaes âs rectas KR, KS; demonstro-o assim.

Porquanto o semi-diametro da esfera *pode* o triplo da metade do lado do cubo (15.) serà o quadrado KE, ou KC, triplo do quadrado CQ: porem a recta KR, tambem *pode* o mesmo triplo [e provo: por ser XO = KO; e OM = OF; serà XM = KF; porem, por estar XM, cortada em O, em media, e extrema razão (15.) o quadrado XM, junto com o quadrado OM, são triplos do quadrado XO (4.) logo tambem os quadrados KF, OF; isto he, KF, RF; isto he, o quadrado KR, serà triplo do quadrado KO, ou XO, ou CQ] logo as 2. rectas KC, KR, são iguaes. *Q. E. &c.*

Ainda resta mostrar, que tocando a esfera os 4. pontos C, R, S, D, toca tambem o quinto *e*. do mesmo pentagono; porem isto não serà difficil, supposto o que fica ditto: porquanto pelo mesmo discurso, com que se mostra que toca os pontos R, S, se mostra tambem (voltando a *Figura*) que toca os pontos *o. e.* Porem independentemente desta razão, mostrarey absolutamente com *Clavio. Que se de qualquer ponto E, se tirarem*
Fig. 25. *4 rectas iguaes a quaesquer 4. angulos de hum pentagono EC, ER, ES, ED; tambem a quinta que se tirar ao quinto angulo Ee. hade ser igual.*

Dem. Tire-se a perpendicular EO; e no plano do pentagono as rectas CO, RO, &c. Porquanto os 4. triangulos EOC, EOR, &c. são rectangulos em O, tem

hum

hum lado EO commum, e as bases EC, ER, &c. iguaes; serão tambem iguaes os outros lados CO, RO, &c. (47.1.) logo o ponto O, he centro do circulo circunscripto ao pentagono (9.3.) logo o quinto triangulo EO*e*, he totalmente igual aos 4. (4. 1.) logo EC = E*e*. *Q.E.&c.*

Finalmente, quanto â proporção. Porquanto o diametro da esfera se suppoem Racional; e he triplo em *potencia* do lado do cubo (15.) tambem o ditto lado serà Racional (*Def.* 6. 10.) o mesmo digo do semi-lado. Porem este, ou seu igual OZ, se suppoem dividido em M, em media, e extrema razão; e por conseq. o mayor segmento OM, ou seu igual FS, he Irracional *Apotome* a respeito do ditto semi-lado (6.) logo tambem a dupla do ditto mayor segmento; isto he RS, lado do dodecaëdro, serà Irracional *Apotome* a respeito do duplo do ditto semi-lado, ou lado do cubo: e por conseq. do diametro da esfera. *Q.E.&c.*

COROLLARIOS.

1. SE o lado do cubo inscripto em huma esfera, se cortar em media, e extrema razão; serà o mayor segmento lado do dodecaëdro, inscripto na mesma esfera.

Dem. Porquanto OZ : OM = OM : MZ. (*Constr.*)
serão 2.OZ : 2.OM = 2. OM : 2. MZ
isto he, serà XZ : NM = NM : XN+MZ.&c.

2. Se cortada huma recta em media, e extrema razão, for o menor segmento lado do dodecaëdro; serà o mayor segmento lado do cubo, inscriptos &c.

Dem. Porquanto CS, RD, subtendem 2. angulos conjunctos do mesmo pentagono, cortar-se-hão em media, e extrema razão (8.) logo serà CS, [ou CD, lado do cubo] para o mayor segmento [isto he, para

RS,

RS, lado do mesmo pentagono (8.)] como o mesmo mayor segmento para o menor: logo accrescentando ao primeiro termo o mesmo mayor segmento, ficarà a composta dividida tambem em media, e extrema razão (4.) cujo mayor segmento serà o lado do cubo, e o menor o do dodecaëdro, &c.

3. Em cada dodecaëdro ha 6. lados; dos quaes cada 2. oppostos são parallelos: a estes cortão pelo meyo, e em angulos rectos, 3. rectas iguaes, tiradas pelo centro do mesmo dodecaëdro: noqual ponto tambem estas se cortão pelo meyo, e em angulos rectos.

4. Finalmente se qualquer das dittas rectas, tiradas pelo centro, se cortar em media, e extrema razão, serà o mayor segmento o lado do cubo, e o menor o do dodecaëdro. Hum, e outro *Cor.* consta facilmente do ditto: e não me detenho mais nas suas Demonstrações, por não confundir a *Figura.*

ESCHOLIO.

Fig. 27. *SE se fizerem de papelão 12. pentagonos iguaes, e se formar com elles hum solido com as medidas que prescreve a Prop. serà este o dodecaëdro, &c.*

PROPOSIÇÃO XVIII.

e ultima *Probl.*

Fig. 22. *Expôr, e comparar os lados dos 5. corpos regulares.*

SEja KA, o diametro de huma esfera. Divida-se *primò* pelo meyo em C; e de tal sorte em 3. 5. que seja 3 A, a sua terceira parte, e 5 A, a quinta. *Secundò*: descripto sobre a ditta recta hum semi-circulo, levantem-se as perpendiculares CB, 3 D, 5O; e tirem-se as subtensas

tenſas KB, BA : KD, DA : KO, OA. *Tertiò*: corte-ſe de KO, o ſegmento EO, igual ao lado do decagono, que ſe houver de inſcrever em hum circulo, de quem OA ſeja ſemidiametro. E corte-ſe DA em Q em media, e extrema razão. Iſto feito,

Digo 1. que KD, he lado do tetraëdro inſcripto naquella esfera, de quem KA, he diametro.

Dem. KA : KD = KD : K 3. (8.6.) logo o Quad. KA : Quad. KD = KA : K 3. (20.6.) Porem a razao de KA, para K 3. he ſeſqui-altera (*Conſtr.*) logo tambem ſerá ſeſqui-altera a do Quad. KA, para o Quad. KD; e por conſequencia KD, he lado do tetraëdro (13.) *Q. E. &c.*

Digo 2. que KB, he lado do octaëdro; por ſer KA dupla em potencia do ditto lado (14.)

Digo 3. que, por ſer DA, media proporcional entre KA, e 3 A: iſto he, por ſer o Quad. KA para o Quad. DA, como KA à 3 A; ou como 3. à 1. ſerà DA, lado do cubo (15.)

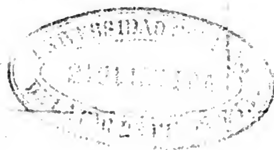
Digo 4. que por ſer OA, media proporcional entre KA, e 5 A; e KA quintupla de 5 A; ſerà o Quad. KA, quintuplo do Quad. OA: logo OA, ſerà ſemidiametro do circulo, circunſcripto a 5. angulos conſequutivos do icoſaëdro (16.) Porem EO, he lado do decagono, e OA do hexagono do meſmo circulo: logo EA, ſerà o lado do meſmo icoſaëdro (16.)

Digo 5. que por eſtar DA, lado do cubo, cortada em Q em media, e extrema razão, ſerá QA, mayor extremo, lado do dodecaëdro (*Cor.* 1. *da ant.*)

Quanto â comparação; melhor conſtará da Taboa ſeguinte, em que não ſòmente ſe vêm as proporções dos lados, ſenão tambem as das ſuperficies, e as das corpulencias dos 5. corpos, reduzidas a fractos decimaes atè a quinta diviſão. O diametro da esfera ſe ſuppoem de duas unidades com 5. cifras; iſto he, de duzentas milleſimas.

Taboa da comparação dos 5. Corpos Regulares segundo Herigonio.

Diametro da Esfera.	2.
Lado do Tetraëdro.	163299.
Lado do Cubo.	115470.
Lado do Octaëdro.	141421.
Lado do Dodecaëdro.	71364.
Lado do Icosaëdro.	105146.
Superficie da Esfera.	1256637.
Area do Circulo Maximo.	314159.
Superficie do Tetraëdro.	461880.
Superficie do Cubo.	8.
Superficie do Octaëdro.	692820.
Superficie do Dodecaëdro	1051462.
Superficie do Icosaëdro.	957454.
Corpulencia da Esfera.	418879.
Corpulencia do Tetraëdro.	51320.
Corpulencia do Cubo.	153960.
Corpulencia do Octaëdro.	133333.
Corpulẽcia do Dodecaëdro.	278516.
Corpulencia do Icosaëdro.	253615.



ESCHOLIO.

P*Ara mayor intelligencia desta Taboa: e ainda para que os curiosos possão examinar as proporções dos seus numeros [de que todavia não estou muito satisfeito] me pareceo preciso pôr aqui ao menos os titulos daquellas Proposições, de que depende a sua construcção; tiradas pela mayor parte do Supplemento de* Hypsicles, *de* Pappo, *e de* Clavio.

Hypsicles no *Suppl. l.* 14.

PRop. 9. *A superficie do decaëdro he para a do icosaëdro, como o lado do cubo para o do mesmo icosaëdro.*

Prop. 11. *O dodecaëdro he para o icosaëdro na mesma proporção.*

Prop. 12. *O lado do triangulo equilatero he em* potencia *sesqui-tercio da perpendicular, tirada de qualquer dos angulos ao lado opposto. Isto he, como* 100000. *à* 86602.

Prop. 14. *A base do tetraëdro he sesqui-tercia da base do octaëdro. Porèm a superficie do octaëdro he sesquialtera da do tetraëdro.*

Prop. 19. *O semidiametro da esfera he em* potencia *triplo da perpendicular, tirada do centro da mesma esfera a qualquer das bases do octaëdro.*

Prop. 20. *O duplo do quadrado do diametro da esfera he igual â superficie do cubo. E a perpendicular, tirada do centro da mesma esfera â base do cubo, he igual â metade do lado do mesmo cubo.*

Prop. 21. *A mesma perpendicular, que cahe do centro da esfera sobre a base do cubo; cahe tambem sobre a base do octaëdro.*

Prop. 22.

Prop. 22. *O octaëdro he para o triplo do tetraëdro, como o lado do primeiro para o lado do segundo.*

Prop. 27. *O cubo he para o octaëdro como a superficie do primeiro para a superficie do segundo: ou tambem como o lado do cubo para o semidiametro da esfera.*

Prop. 30. *O quadrado do cubo he para o triangulo do tetraëdro, como o lado do tetraëdro para a perpendicular do ditto triangulo.*

Prop. 31. *O lado do tetraëdro he em* potencia *sesqui-altero do seu exo; e o exo he em* potencia *sesqui-tercio do lado do cubo.*

Prop. 32. *O cubo he triplo do tetraëdro.*

Pappo. na *Inscripção dos 5. Corpos Regulares, &c.*

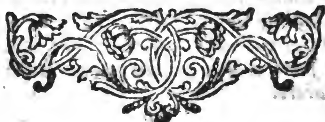
Cor. da Prop. 2. *O diametro da esfera he em* potencia *duplo do lado do octaëdro.*

Cor. da Prop. 3. *O diametro da esfera he em* potencia *triplo do lado do cubo.*

Cor. da Prop. 4. O *diametro da esfera he para o lado do icosaëdro, como o lado do pentagono para o do decagono. Isto he, como* 58778. *à* 30901.

Clavio.

O*Yto quadrados do semidiametro da esfera são iguaes á superficie do cubo.*



APPEN-



APPENDIZ II.

DOS THEOREMAS SELECTOS DE *Arquimedes*, pertencentes â Esfera, Cylindro, e Pyramide Conica.

Não ficaria completo este Tratado, se não se lhe accrescentassem alguns Theoremas de Arquimedes, *pertencentes â Esfera, Cylindro, e Pyramide Conica, com que se promovesse a especulação destes 3. corpos circulares, de que trata* Euclides *no livro 12. e se facilitasse a sua resolução. Muitos outros Theoremas deste Feniz dos engenhos, pertencentes âs Esferoïdes, e Conoïdes, daremos no Appendiz da* Geometria Superior, *visto não terem lugar neste Tratado, em que só se trata da* Geometria Inferior; *isto he, daquella que somente se absolve por via de Regoa, e Compasso, como deixamos notado no principio desta obra.*

DEFINIÇÕES.

TOme-se dentro de hum circulo DBAC, huma perpendicular ao diametro, BC; e tirados os ra- Fig. 28.

yos OB, OC, âs extremidades da ditta perpendicular, revolva-se o circulo sobre o mesmo diametro. Digo que.

1. *Sector da Esfera*: he o solido OBAC, o qual se considera produzido da circumvolução do triangulo mixtilineo OBA.

2. *Segmento da Esfera*: he o solido BAC, o qual se considera produzido da circumvolução do outro triangulo mixtilineo CQA; ou tambem o solido BDC, &c.

3. *Vertice do segmento menòr BAC*: he o extremo do diametro A. O do mayor BDC, he o outro extremo D.

A Base commua dos dittos segmentos: he o circulo QBSC. Os seus *Exos*: são os segmentos do Exo da Esfera, interceptos entre os vertices, e a base commua; AQ, DQ.

4. Quando se falla da *Superficie Esferica* de qualquer porção da Esfera; ou de qualquer corpo circular nella inscripto, nunca se entende o circulo da base. O mesmo digo da *Superficie Cylindrica*, ou *Conica*; excepto quando se accrescenta *Toda*; porque então entra tambem o ditto circulo.

* Em todo este Tratado sò se trata de Cylindros, e Pyramides Conicas *Rectas*.

AXIOMAS.

1. O Ambito do polygono inscripto em hum circulo, sempre he menor que a circunferencia do ditto circulo: e o do circunscripto, mayor.

2. Se o circulo em que estiver inscripto hum polygono, se revolver sobre o seu diametro; serà a superficie do solido produzido do polygono, sempre menor que a da esfera produzida do circulo: e a do circunscripto, mayor.

3. O am-

3. O ambito do polygono inscripto em hum segmento de circulo, sempre he menor que o ditto segmento. E se hum, e outro se revolver sobre o exo commum, a superficie do solido descripto do polygono, serà menor que a da porção esferica descripta do arco.

4. A superficie do prisma inscripto em hum cylindro he menor que a superficie do ditto cylindro: e a do circunscripto, mayor. O mesmo digo da superficie da pyramide rectilinea inscripta, ou circunscripta na conica.

PROPOSIÇÃO I.

Se dadas quaesquer figuras (ou planas, ou solidas) A,B, se derem outras mayores E,F, as quaes decrescendo infinitamente atè fenecerem nellas, sejão sempre entre si iguaes; tambem as primeiras A, B, serão iguaes.

E: F.
A:B.X.

DEm. Se não são: seja A, mayor que B; e seja o excesso X. Porquanto se podem dar duas figuras E, F, entre si iguaes, as quaes excedão as dadas A, B, em menor quantidade, que qualquer assignada X (*Hyp.*) serà F, menor, que A: porem F, he igual à E (*Hyp.*) logo tambem E, he menor que A, contra a supposição.

PROPOSIÇÃO II. *Theor.*

Se dadas quaesquer figuras A, B, se derem outras menores E, F, as quaes crescendo infinitamente, atè fenecerem nellas, sejão sempre entre si iguaes; tambem as primeiras A, B, serão iguaes.

A : B.Z.
E : *F*.

DEm. Se não são: seja A, mayor que B; e seja o excesso Z. Porquanto se podem dar duas figuras E, F, entre si iguaes, as quaes sejão excedidas das dadas A, B, em menor quantidade, que qualquer assignada Z (*Hyp.*) serà E, mayor que B: porèm E, he igual à F (*Hyp.*) logo tambem F, he mayor que B, contra a supposição.

PROPOSIÇÃO III. *Theor.*

Fig. 1. *Os ambitos dos polygonos circunscriptos em qualquer circulo, fenecem na circunferencia do mesmo circulo. O mesmo digo das áreas dos mesmos polygonos a respeito da do circulo.*

DEm. 1. part. Imaginem-se os circulos divididos, e subdivididos infinitamente, e que ao mesmo passo que se dividem, se lhes circunscrevem, e inscrevem polygonos de mais, e mais lados, &c. Porquanto $AB : ab = OA : Oa$ (*Cor.* 1. *da* 4. 6.) serà tambem o ambito circunscripto ABCDF, para o inscripto *abcdf*, como OA para O*a* (12. 5.) porem *a*A, excesso de OA sobre O*a*, pode ser menor, que qualquer assignado [se se multiplicarem os lados dos polygonos] logo tambem o excesso do ambito circunscripto sobre o inscri-

pto

pto, e muito mais sobre a circunferencia (*Ax.* 1.) pode ser menor que qualquer assignado: o mesmo digo do ambito inscripto: logo hum, e outro fenecem na circunferencia (*Def.* 6. 12.) *Q. E. &c.*

2. Part. Porquanto o excesso de AB sobre *ab*, he e cada vez menor; por ser sempre AB : *ab* = OA : O*a*, será tambem o excesso do Quad. AB sobre o Quad. *ab*. de cada vez menor: porem o Quad. AB : Quad. *ab*. = Polyg. ABCDF : Polyg. *abcdf*. (22. 6.) logo tambem o excesso do primeiro polygono sobre o segundo será de cada vez menor; e muito menor a respeito do circulo: e por consequencia aquelles fenecem neste. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO IV. *Theor.*

O polygono regular circunscripto a qualquer circulo ABCDF, he igual ao triangulo, cuja base he o ambito do ditto polygono, e a altura o rayo do mesmo circulo OE. E o polygono inscripto abcdf, *he igual ao triangulo, cuja base he o seu mesmo ambito, e a altura a perpendicular OQ, tirada do centro do circulo a qualquer dos lados.* Fig. 1.

DEm. 1. part. Porquanto o rayo OE, tirado ao contacto E, he perpendicular ao lado DF (18. 3.) resoluto o polygono em triangulos iguaes, e tirados rayos a todos os contactos, será o rayo OE, altura commua de todos: logo hum triangulo, que tiver por base os lados do polygono, e por altura aquelle rayo, será igual ao ditto polygono. *Q. E. &c.*

2. Part. demonstra-se do mesmo modo, pela *Def.* 4. e *Prop.* 14. *do* 3. porem advirta-se, que a 1. part. he universal para todos os polygonos: a 2. he somente para os regulares.

PROPOSIÇÃO V. *Probl.*

O circulo he igual ao triangulo, cuja base he a periferia do mesmo circulo, e a altura o rayo.

D*Em.* O polygono circunscripto he sempre igual ao triangulo, cuja base he o ambito do mesmo polygono, e a altura o rayo (*Ant.*) porem o polygono circunscripto fenece no circulo; assim como o ditto triangulo em outro, que tem por base a circunferencia, e por altura o mesmo rayo [por ser hum para outro, como o ambito para a circunferencia (1.6.) cuja differença he sempre menor que qualquer assignavel] logo o circulo he igual ao ditto triangulo (1.) *Q.E.&c.*

COROLLARIOS.

1. DEsta, e da 41. do 1. se infere 1. que o rectangulo comprehendido do rayo, e da metade da circunferencia, he igual ao circulo: 2. que o comprehendido do mesmo rayo, e de toda a circunferencia, he duplo: 3. e que o comprehendido de todo o diametro, e de toda a circunferencia, he quadruplo.

2. O circulo he para o quadrado inscripto, como metade da circunferencia para o diametro: e para o circunscripto, como a quarta parte da mesma circunferencia para o mesmo diametro.

Fig. 4. do l. 4. *Dem.* o quadrado inscripto GLHQ, he igual ao rectangulo GE, comprehendido do diametro, e do rayo: e o circulo, que o comprehende, he igual ao rectangulo comprehendido do mesmo rayo, e da metade da circunferencia: logo hum he para outro, &c. (1.6.) Item: o quadrado circunscripto he para o inscripto, como 2. diametros para hum

Cir.	$\frac{1}{2}$*circunf.*
Q. inscr.	1.*diam.*
Q.circunscr.	2.*diam.*

so: logo por igual, o circunscripto he para o circulo, como 2. diametros para metade da circunferencia; ou como 1. diametro para a quarta parte da circunferencia.

PROPOSIÇÃO VI. *Theor.*

A circunferencia do circulo contem o diametro menos que 3. vezes, e $\frac{1}{7}$: e mais que 3. vezes, e $\frac{10}{71}$.

PAra achar a medida da circumferencia em partes do diametro, usou *Arquimedes* de 2. polygonos, de 96. lados cada hum; hum circunscripto, e outro inscripto; e mostrou, que o perimetro do primeiro continha o diametro do circulo menos que 3. vezes, e $\frac{1}{7}$: e que o perimetro do segundo continha o mesmo diametro mais que 3. vezes, e $\frac{10}{71}$: e por conseq. que a circunferencia do dito circulo, a qual he menor que o primeiro, e mayor que o segundo perimetro, ainda differia menos &c.

A Demonstração de *Arquimedes* he igualmente prolixa, que engenhosa: a de que usão os modernos depende da *Trigonometria*: peloque, reservando esta materia para a *Geometrica Pract.* darey aqui sómente algumas approximações mais celebres, quanto baste para resolver quaesquer Problemas, que dependão da commensuração do circulo.

1. Appro-

1. Approximação de *Arquimedes.*

Diametro. 7.

Circunferencia mayor que a verdadeira. 22.

Diametro. 71.

Circunferencia menor que a verdadeira. 223.

* DAqui se segue, que se as razões (22:7.) (223:71.) se reduzirem a hum consequente commum â maneira de quebrados, nesta forma $\frac{1562}{497}$; posto o diametro de 497. partes, tocarão â circunferencia mayor que a verdadeira 1562. â menor 1561. e serà a differença $\frac{1}{497}$. Item; que se se inverterem os termos das mesmas razões (7:22.) (7:223.) e se reduzirem a outro consequente cōmum nesta forma $\frac{1561 \quad 1562}{4906}$; posta a circunferencia de 4906. partes, tocarão ao diametro menor que o verdadeiro 1561. ao mayor 1562. e serà a differença $\frac{1}{4906}$.

2. Approximação de *Metio.*

Diametro. 113.

Circunferencia mayor que a verdadeira. 355.

* ESta he muito mais exacta, que a de *Arquimedes*, e a que em numeros pequenos mais se chega â verdadeira: porquanto posto o diametro de 10,000,000. e buscando-se na ditta proporção a circunferencia, acharse-ha de 31.415,929. isto he, tam pro-

xima â verdadeira, que a penas a excede em pouco mais de 2. unidades; isto he, em dez millionesimas do diametro, como se vè claramente na approximação seguinte.

3. Approximação de *Ludolfo de Ceulen.*

Diametro. 100. 000,000. 000,000. 000,000.

Circunferencia mayor que a verdadeira
314. 159,265. 358,979. 323,847.
Circunferencia menor que a verdadeira
314. 159,265. 358,979. 323,846.

* Esta he a mais exacta de todas quantas se tem achado atègora; e pela qual devemos muito â diligencia deste famoso Iogista; pois multiplicando mais e mais os lados dos polygonos inscriptos, e circunscriptos; e tomando hum rayo excessivamète crescido, chegou a tal proximidade, que a penas chega a differença do perimetro circunscripto ao do inscripto, a huma particula do diametro, denominada de huma unidade com 20. cyfras. Outra ainda mais exacta achou o mesmo Author, cuja differença se exprime com huma unidade, e 35. cyfras: porem como huma, e outra são pouco uteis para a praxe, concluirey esta materia com a approximação de *Ricciolo*; aqual por ser sufficientemente exacta, e muy expedita para os calculos, será a de que usaremos nelles daqui por diante.

4. Appro-

4. Approximação de *Ricciolo.*

Diametro 100.

Circunferencia menor que a verdadeira. 314.

ESCHOLIO.

A*S praxes utilissimas, que se seguem desta* Prop. *são as seguintes.*

1. Dada a circunferencia achar o diametro. *Ponha-se o mayor termo de qualquer destas* 4. *proporções em primeiro lugar, em segundo o menor, e em terceiro o numero das partes da circunferencia dada: multiplique-se o segundo pelo terceiro, e divida-se o producto pelo primeiro: será o quociente o numero das partes, que tocão ao diametro.*

V.g. Conste o ambito do circulo maximo da Terra *de* 6300 *legoas Espanholas (a razão de* 17 *e* $\frac{1}{2}$. *cada grào) e dezeje-se saber o diametro da mesma* Terra. *Disponhão-se os numeros na forma seguinte.*

$$314 : 100. = 6300. : 2006. \tfrac{116}{314}.$$

e feita a operação segundo a regra dada, sahirà o diametro de 2006. $\frac{116}{314}$. *legoas.*

2. Dado o diametro, achar a circunferencia. *Invertão-se os primeiros dous numeros; e faça-se a mesma operação.*

$$100 : 314 = 2006. \tfrac{116}{314}. : 6300 \text{ \&c.}$$

3. Dado o diametro, achar a area do circulo. *Ache-se pela* Praxe ant. *a circunferencia pelo diametro; e multiplique-se a metade deste pela metade daquella; serà o producto a area do circulo* (5. Cor. 1.) *V. g. o diametro dado são* 2006. $\frac{116}{314}$. *cuja metade são* 1003. $\frac{58}{314}$. *e a circunferencia achada são* 6300. *cuja meta-*

da

de ſão 3150. *os productos deſtas duas metades ſão* 3. 160,031. $\frac{2}{3}$. *digo, que eſtas ſão as legoas quadradas, que contem a area do circulo maximo da Terra* As quaes tomadas* 4. *vezes dão as quadradas da ſua ſuperficie, como veremos deſpois na* Prop. 24.

4. Dado o diametro da baſe, juntamente com a altura de qualquer cylindro, ou pyramide conica, achar a ſolidez de cada hum. *Os priſmas, e cylindros ſe produzem da multiplicação das alturas pelas baſes; e as pyramides rectilineas, e conicas, da multiplicação das meſmas baſes pela terceira parte das alturas* (10. *e* 7. *do* livro 12.) *Como pois, dado o diametro da baſe, ſe tem a meſma baſe* (Praxe ant.) *e ſe ſuppoem dada a altura; ſegue-ſe, que em ſe multiplicando hum numero por outro, ſegundo a regra, ſe tem o que ſe buſca.*

PROPOSIÇÃO VII. *Theor.*

As periferias dos circulos ſão entre ſi, como os diametros. Fig. 6. e 7. do l. 12.

D*Em.* Os ambitos dos polygonos ſemelhantes inſcriptos em 2. circulos, ſão conſtantemente como os diametros (*Cor. da* 1. 12.) porem os ditos ambitos fenecem nas periferias (3.) logo tambem eſtas ſão entre ſi como os meſmos diametros (*Poriſ. univ. do livro* 12.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO VIII. *Theor.*

Fig. 3. *A superficie do prisma regular circunscripto, ou inscripto em hum cylindro, he igual ao rectangulo, cuja altura he o lado do mesmo cylindro LI, e a base o perimetro da base prismatica ACDB &c: ou ZPQT. &c.* * Veja-se a nota â Def. 4.

DEm. A superficie do prisma circunscripto toca o cylindro no lado LI, o qual he perpendicular â base, por se suppôr recto o ditto cylindro (o mesmo digo das outras rectas dos contactos) logo todos os rectangulos AF, CG, DH, &c. convêm em terem huma mesma altura, que he o lado do cylindro; e por base hum dos lados da base do prisma: logo a superficie prismatica, que he a summa de todos estes rectangulos, tem por base o perimetro do prisma, e por altura o lado do cylindro. *Q. E &c.*

O mesmo se entende do prisma inscripto, cujo lado OQ, tambem he lado do mesmo cylindro.

PROPOSIÇÃO IX. *Theor.*

Fig. 4. *A superficie da pyramide regular, circunscripta â conica, he igual ao triangulo, cuja base he o perimetro da base pyramidal BEFD &c. e a altura o lado da mesma pyramide conica AQ. E a superficie da pyramide inscripta he igual ao triangulo, cuja base he o perimetro pyramidal, e a altura a perpendicular AO, tirada do vertice a qualquer dos lados CS.*

DEm. 1. part. Tirem-se do vertice A, aos contactos das bases Q, K, Q, outras tantas rectas: serão

rão estas lados da pyramide conica; e (por ser esta recta) todas entre si iguaes: e porquanto o exo AG, he perpendicular à base, serà tambem o plano AGQ, perpendicular à ditta base (18 11.) e por conseq. EQ, que nella existe, e he perpendicular à commua secçáo QG (18. 3.) serà tambem perpendicular ao lado QA (*Def.* 4. 11.) He pois o lado AQ, lado da pyramide conica, e altura do triangulo BAE: o mesmo digo dos outros lados, que cahem dentro dos outros triãgulos EAF, FAD, &c. logo o triangulo, que tiver por base o perimetro da base pyramidal BEFD, &c. e por altura o ditto lado, serà igual â superficie pyramidal circunscripta. *Q. E. &c.*

2. Part. Demonstra-se do mesmo modo.

PROPOSIÇÃO X. *Theor.*

A superficie do prisma regular circunscripto, ou inscripto no cylindro recto, fenece na superficie do ditto cylindro. O mesmo digo da superficie da pyramide regular circunscripta, ou inscripta na conica. Fig. 1. e 4.

DEm. 1. part. As superficies dos prismas regulares, circunscriptos, ou inscriptos infinitamente nos cylindros, chegão a ter finalmente huma differença entre si menor, que qualquer assignavel; como facilmente se infere das *Proposições* 8 e 3. logo ainda a terão menor a respeito da superficie cylindrica (*Ax.* 4.) logo &c.

A 2. part. demonstra-se do mesmo modo pela *Prop.* 9. e 3. * Advirta-se, que as *Figuras* 3. e 4. representão somente as metades dos solidos, por evitar confusão.

Lemma. I.

Fig. 7. *Se as rectas QO, S, CP, forem continuas proporcionaes, e ſe tomar a metade da primeira AO, e a dupla da terceira QP, tambem AO, S, QP, ſerão continuas proporcionaes.*

DEm Porquanto AO : QO = CP : QP, ſerá o Rect. AO, QP = Rect. QO, CP (16.6.) porem o Rect. QO, CP = Quad. S (17.6.) logo tambem o Rect. AO, QP = Quad. S: e por conſeq. AO, S, QP, ſão continuas proporcionaes (17.6.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XI. *Theor.*

Fig. 5. e 6. *O circulo XMMM, cujo rayo XZ, he medio proporcional entre o lado do cylindro recto, e o ſeu diametro; iſto he, entre CQ, e QO, he igual á ſuperficie do meſmo cylindro.*

DEm. Circumſcrevão-ſe ao cylindro infinitos priſmas regulares, &c. A baſe de qualquer priſma circunſcripto; iſto he, o polygono DFE, he igual ao triangulo, que tem por altura o ſemidiametro AB, e por baſe o perimetro DFE (4.) e a ſuperficie do meſmo priſma he igual ao rectangulo, que tem por altura o lado do cylindro CQ (ou ſeu igual HD) e por baſe o meſmo perimetro (8.) porem o ditto rectangulo he igual ao outro triangulo, que tem por altura 2 CQ, e a meſma baſe (*Eſch. da* 41. 1.) logo ſendo os triangulos, que tem a meſma baſe, como as alturas (*Cor. da* 1.6.) ſerá a baſe do priſma para a ſuperficie priſmatica, como AB para 2 CQ: o meſmo digo de outro qualquer

priſma,

prisma. Porem os polygonos fenecem no circulo, ou base do cylindro, assim como as superficies prismaticas na cylindrica (3. e 10.) logo tambem a base do cylindro he para a superficie cylindrica, como AB (ou AQ) para 2CQ [*Por. univ. do l.* 12.]

Porem por serem QO, XZ, CQ, continuas proporcionaes (*Hyp.*) tambem AQ, XZ, 2CQ, são continuas proporcionaes (*Lem. ant.*) e por consequencia AQ, he para 2CQ, em duplicada razão de AQ para XZ: logo a base do cylindro; isto he, o circulo AQGO, he para a superficie cylindrica em duplicada razão de AQ para XZ. Porem tambem o circulo AQGO, he para o circulo XMMM, em duplicada razão de AQ para XZ (2. 12.) logo o circulo XMMM, he igual à superficie cylindrica (9 5.) *Q. E. &c.*

* Quem quizer demonstralla, inherendo nos principios de *Arquimedes*, recorra à *Prop.* 13.* Deste insigne *Theor.* se tira o modo de exhibir hum circulo igual à superficie cylindrica de qualquer cylindro recto.

COROLLARIOS.

A Superficie do cylindro recto he igual ao rectangulo, que tem por altura o lado do cylindro, e por base a circunferencia da sua base.

Dem. Consta do ditto, que 2CQ : XZ = XZ : AQ; porem XZ : AQ = MMM : QGO (7.) logo 2 CQ : XZ = MMM : QGO (11. 5.) logo o triangulo, que tiver por base a circumferencia QGO, e por altura 2 CQ (isto he, o rectangulo que tiver a mesma base, e metade da ditta altura) serà igual ao triangulo, que tiver por base a circumferencia MMM, e por altura o rayo XZ; isto he, ao circulo XMM (5.) ou à superficie cylindrica sua igual. *Q. E. &c.*

* Daqui se infere, que todas as propriedades, que

se

ſe demonſtrão dos rectangulos, ſão communas âs ſuperficies cylindricas dos cylindros rectos: iſto he,

2. As ſuperficies cylindricas igualmente altas BEDF, QNFM, ſão entre ſi como os diametros das baſes, FE, MN.

Fig. 25. 26. e 27. do l. 12. *Dem.* Os rectangulos comprehendidos das circunferencias EDF, NTM; e das alturas iguaes BE, QN, ſão entre ſi como as meſmas circunferencias (1. 6.) logo tambem ſerão como os diametros FE, MN (7.) *Q. E. &c.*

3. As ſuperficies cylindricas QNM, EVR, que tem iguaes baſes, ſão entre ſi como as alturas (*Cor. da* 1. 6.)

4. As ſupeficies cylindricas ſemelhantes BEF, KNM, ſão entre ſi em duplicada razão dos diametros das baſes FE, MN.

5. As ſuperficies cylindricas ſão entre ſi em razão cõpoſta dos lados, e dos diametros das baſes.

6. As ſuperficies cylindricas iguaes tem os lados reciprocos com os diametros das baſes. E as que os tem reciprocos, ſão iguaes.

7. Finalmente a dimenſão das dittas ſuperficies ſe abſolve pelas regras geraes dos rectangulos; achadas primeiramente pelos diametros das baſes as circunferencias das meſmas (6.)

PROPOSIÇÃO XII. *Theor.*

Fig. 6. e 5. *A ſuperficie do cylindro recto CO, he para a baſe QGO, como o lado CQ, para a quarta parte do diametro QR.*

DEm. Seja XZ, media proporcional entre CQ, e QO: e pelo *Lem.* 1. ſeja tambem media proporcional entre 2 CQ, e QA. O circulo XMM, he igual â ſuperficie cylindrica CO (*Ant.*) porem o circulo XMM, he

he para a base QGO, em duplicada razão de XZ para QA; isto he, como 2CQ para QA (*Def.* 10. 5.) ou como CQ para QR (12.5.) logo tambem a superficie cylindrica CO, he para a base QGO, como CQ para QR. *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

A Superficie do cylindro, cujo lado he igual ao diametro, he quadruplo da base: e se o lado for igual â quarta parte do ditto diametro, será igual.

PROPOSIÇÃO XIII. *Theor.*

O circulo XMM, cujo rayo he medio proporcional entre o lado VC, da pyramide conica recta, e o rayo da base CC, he igual à superficie conica da mesma pyramide. Fig. 8. 9.

DEm. Imaginem-se circunscriptos infinitos polygonos regulares semelhantes, tanto na base da pyramide OSCR, como no circulo XMM: e que sobre os primeiros se levantão outras tantas pyramides rectilineas igualmente altas VPTQ. Porquanto OC, XZ, VC, são continuas proporcionaes (*Hyp.*) será OC para VC, em duplicada razão de OC para XZ: porem, como OC para VC, assim o triangulo, que tem por altura o rayo OC, e por base o ambito do polygono circunscripto, para o triangulo, que tem por altura o lado VC, e por base o mesmo perimetro (*Cor. da* 1. 6) logo o primeiro triangulo he para o segundo em duplicada razão de OC para XZ: e por consequencia, sendo o primeiro igual à base da pyramide circunscripta, e o segundo â sua superficie (4. e 5.) será o polygono PTQ, para

para a ſuperficie pyramidal VPTQ, em duplicada razão de OC para XZ.

Porem o meſmo polygono PTQ, he para o ſeu ſemelhante DBF (circunſcripto ao circulo XMM) em duplicada razão dos meſmos rayos (1.12.) logo a ſuperficie pyramidal VPTQ, he ſempre igual ao polygono DBF; e por conſequencia, fenecendo a primeira na ſuperficie conica (10.) e o polygono no circulo XMM (3.) tambem a ſuperficie conica ſerá igual ao ditto circulo (1.) *Q. E. &c.*

COROLLARIOS.

1. A Superficie conica VSCR, he igual ao triangulo, cuja altura he o lado VC, e a baſe a circunferencia SCR. Demonſtra-ſe do meſmo modo, que o *Cor.* 1. *da* 11. Daqui ſe ſegue, que todas as propriedades, que ſe demonſtrão dos triangulos rectangulos, ſe demonſtrão tambem das ſuperficies conicas das pyramides rectas: e aſſim.

2. As ſuperficies conicas, que tem iguaes lados, ſão entre ſi, como os diametros das baſes.

3. As que tem os diametros, ou as circunferencias iguaes, ſão entre ſi, como os lados.

4. As ſemelhantes ſão em duplicada razão dos diametros.

5. E quaeſquer duas tem entre ſi a razão compoſta dos lados, e dos diametros.

6. As que ſão iguaes, reciprocão os lados com os diametros. E as que os reciprocão, ſão iguaes.

7. Finalmente acha-ſe hum circulo igual a qualquer ſuperficie conica, ſe ſe acha huma media proporcional entre o lado VC, e o ſemidiametro OC: e mede-ſe a meſma ſuperficie, ſe ſe multiplica o ditto lado pela metade da circunferencia SCQ; ou pelo contrario &c.

PRO-

PROPOSIÇÃO XIV. *Theor.*

A superficie conica he para o circulo da base, como o lado VC para o rayo OC.

DEm. Seja XZ, media proporcional entre VC, e OC. O circulo XMM, he para o circulo OSCR, em duplicada razão de XZ para OC: isto he, como VC para OC: porem a superficie conica VSCR, he igual ao dito circulo XMM (*Ant.*) logo tambem &c. Fig. 8. e 9.

Por outro modo. A superficie conica he igual ao triangulo, que tem por altura o lado, e por base a circunferencia da base (*Cor. 1. da ant.*) e a base he igual ao triangulo, que tem por altura o rayo, e por base a mesma circunferencia (5.) logo huma he para a outra, como o lado para o rayo.

COROLLARIOS.

1. A Superficie conica, que resulta da circumvolução de hum triangulo equialtero FEG, sobre a perpendicular EO, he dupla da base OFSG. Fig. 27.

Dem. O lado FE, he igual ao diametro FG; e duplo do rayo OG: logo &c.

2. A superficie conica que, resulta da circumvolução de hum triangulo isósceles rectangulo BEC, sobre a perpendicular EQ, he para a base QBTC, como o diametro para o lado do quadrado. Fig. 27.

Dem. A perpendicular EQ, corta pelo meyo o angulo recto E (26. 1.) logo o triangulo EQB, he a metade de hum quadrado, cujo diametro he EB, e cujo lado he BQ. &c.

3. A superficie do cylindro HDTG, he para a superficie da pyramide conica BDTG [existentes sobre a mesma base, e com a mesma altura] como o lado do Fig. 23.

cylindro HD, para a metade do lado da pyramide BD.

Dem. A superficie da pyramide he para a base, como o lado BD para o rayo DA; isto he, como $\frac{1}{2}$. BD para $\frac{1}{4}$. DG: porem a mesma base ADTG, he para a superficie cylindrica, como $\frac{1}{4}$. DG para o lado HD (12.) logo por igual, a superficie da pyramide conica he para a cylindrica, como $\frac{1}{2}$. BD para HD; isto he, invertendo &c.

Lemma 2.

Fig. 10. *Se em qualquer triangulo BAC, se tirar huma recta DE, parallela â base BC; serà o rectangulo comprehendido de AC, CB, igual ao rectangulo comprehendido de AE, ED, juntamente com os comprehendidos de EC, e das rectas ED, CB.* O mesmo se entende para a outra parte.*

D*Em.* Tire-se GC, igual à CB, e perpendicular ao lado AC; e forme-se o rectangulo FC: tire-se a parallela EH: a diagonal AG: e pelo ponto O, a outra parallela IL. Porquanto GC, CB, são iguaes, serão tambem iguaes OE, ED (*Cor.* 1. *da* 4.6. e 9. 5.) logo o Rect. FC = Rect. ACB; e o Rect. IE = Rect. AED. Resta pois demonstrar, que os 2. rectangulos IH, HC, são iguaes ao rectangulo comprehendido de EC, e das duas ED, CB: porem isto he manifesto, por ser HC, comprehendido de EC, GC, ou CB seu igual; e IH igual à EL (43. 1.) comprehendido de EC, OE, ou ED sua igual: logo &c.

PRO-

PROPOSIÇÃO XV. *Theor.*

Se se cortar a pyramide conica BAGT, com hum plano parallelo â base; será o circulo POZ (cujo rayo for medio proporcional entre o segmento do lado BD, e a composta dos rayos CB, ED) igual â superficie conica do tronco existente entre os 2. planos parallelos. Fig. 11. e 12.

DEm. Seja PN, media proporcional entre AB, CB; e seja PQ, media proporcional entre AD, ED: descrevão-se com os 3. intervallos PQ, PO, PN, 3. circulos; será o primeiro PQY, igual à superficie conica ADS, e o terceiro PNX, igual à superficie conica ABT (13.) Isto supposto.

O Rect. ABC = aos RRect. ADE+BDE+DBC (*Lem. ant.*) Porem, por ser PN, media proporcional entre AB, CB; o Rect. ABC = ao Quad. PN: por ser PQ, media proporcional entre AD, ED, o Rect ADE = ao Quad. PQ: e por ser PO, media proporcional entre BD, e a composta dos rayos ED, CB; os RRect. BDE, + DBC = ao Quad. PO (17. 6.) logo o Quad. PN = aos QQuad. PQ+PO.

Porem os circulos são entre si, como os quadrados dos rayos (2. 12.) logo o circulo PNX = aos circulos PQY+POZ; e por conseq. sendo o primeiro igual â superficie conica ABT, e o segundo igual â parte da ditta superficie ADS, será o terceiro igual â parte remanente DBT. *Q. E. &c.*

Lemma 3.

Fig. 13. *As rectas FH, BN, que cortão da circunferencia de hum circulo porções iguaes, FB, HN, são parallelas.*

D*Em.* Tire-se a recta BH. Porquanto os arcos FB, HN, são iguaes, serão tambem iguaes os angulos alternos FHB, NBH (29. 3.) logo FH, BN, são parallelas (28. 1.) *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XVI. *Theor.*

Fig. 13. *Se se inscrever em hum circulo huma figura regular de lados pares (isto he, de 6. 8. 10. &c.) e do extremo do diametro E, se tirar huma recta ao extremo F, do lado opposto, mais proximo ao ditto diametro; juntos os angulos correspondentes com as rectas FH, BN, GR, será o rectangulo AEF, comprehendido do diametro, e da recta EF, igual ao rectangulo comprehendido de qualquer lado AF, e da composta de todas as dittas rectas FH + BN + GR.*

D*Em.* Tirem-se as transversaes BH, GN. Porquanto todos os arcos a quem subtendem os lados da figura, são iguaes (*Hyp.*) serão as rectas FH, BN, GR, parallelas (*Lem. ant.*) e pela mesma razão as rectas FA, BH, GN, ER: logo os triangulos FAP, HDP; BDQ, NCQ; GCO, REO, são equiangulos (27. e 15. 1.) logo FP : PA = HP : PD. Item BQ : QD = NQ : QC. Item GO : OC = RO : OE (4. 6.) Logo, como qualquer dos antecedentes para o seu consequente; isto he

como,

como FP para PA, assim todos os antecedentes juntos FP+HP+BQ+NQ+GO+RO, para todos os consequentes juntos AP+PD+DQ+QC+CO+OE; isto he, como as perpendiculares FH+BN+GR, para o diametro AE (12.5.) Porem tambem FP: PA = EF: FA (8.6.) logo FH+BN+GR : AE = EF: FA (11. 5.) e por conseq. o rectangulo comprehendido das extremas he igual ao comprehendido das intermedias (16. 6.) *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XVII. *Theor.*

Se no segmento de hum circulo GAR, se inscrever huma figura equilatera, e parilatera, e se tirarem, como na Ant. *as mesmas rectas, serà o rectangulo comprehendido de EF, AO, igual ao rectangulo comprehendido de qualquer dos lados AF, e da composta das perpendiculares FH+BN+½GR.* Fig. 12.

D*Em.* Prova-se do mesmo modo, que a antecedente.

Lemma 4.

Se no circulo maximo de huma esfera se inscrever huma figura regular, cujos lados para huma, e outra parte do diametro sejão pares, e o ditto circulo se revolver sobre o ditto diametro; ficarà inscripto dentro da esfera hum solido, cuja superficie se comporà de varias superficies conicas de pyramides rectas. Fig. 13.

D*Em.* He manifesto, que as rectas AF, AH; EG, ER, descrevem pyramides conicas rectas (*Def.* 2. 12.)

2. 12.) Item, que as rectas BF, NH; BG, NR (por concorrerem em hum mesmo ponto do diametro, produzido para huma, e outra parte (29. 3. e 26. 1.) descrevem tambem pyramides conicas rectas, as quaes ficão cortadas dentro da estera pelos circulos descriptos das perpendiculares FH, BN, GR: logo &c.

Lemma 5.

Se no segmento do circulo maximo de huma esfera se inscrever huma figura equilatera, e parilatera, a qual nem para huma, nem para outra parte tenha lado algum parallelo ao diametro, e esta se revolver sobre o ditto diametro: ficarà inscripto dentro do segmento esferico hum solido, cuja superficie serà composta de muitas conicas de pyramides rectas.

DEm. Prova-se do mesmo modo.

PROPOSIÇÃO XVIII. *Theor.*

Fig. 13. e 17. *Supposto o ditto no* Lemma 4. *e tirada a recta EF, segundo o que fica ditto na* Prop. 16. *serà o aggregado de todas as superficies conicas inscriptas na esfera, igual ao circulo, cujo rayo S,* pode *o rectangulo AEF; isto he, he medio proporcional entre o diametro AE, e a recta EF* (17. 6.)

DEm. Porquanto FH = 2FP; BN = 2BQ; e GR = 2GO: e porquanto todos os lados da figura inscripta são iguaes, serà o rectangulo comprehendido de qualquer lado AF, e das perpendiculares FH, BN, GR;

GR, igual aos rectangulos comprehendidos de AF,FP; de FB,FP+BQ; de BG,BQ+GO; e de GE,GO (consta manifestamente da 3. do 2. por se tomarem duas vezes as metades das perpendiculares; e ser a altura AF, FB,BG,GE, sempre a mesma.)

Porem o rectangulo comprehendido de AF, e do aggregado das perpendiculares FH,BN,GR, he igual ao rectangulo AEF (16.) isto he, ao quadrado S (*Hyp.*) logo o Quad. S, he igual aos rectangulos comprehendidos de AF,FP, de FB,FP+BQ; de BG,BQ+GO; e de GE,GO.

Agora: busque-se entre AF, e FP, huma media proporcional V; entre FB, e FP+BQ, outra media proporcional X; entre BG, e BQ+HO, outra media proporcional Z; e entre GE, e GO, outra media proporcional Y: serão os 4 quadrados V,X,Z,Y, iguaes aos 4 rectangulos assima dittos (17.6.) isto he, ao quadrado S: logo, sendo os circulos entre si como os quadrados (2.12.) será o circulo S, igual aos circulos V, X,Z,Y. Porem, por ser V, media proporcional entre AF,FP; o circulo V, he igual à superficie conica FAH (13.) e por ser X, media proporcional entre FB, e FP +BQ, o circulo X, he igual à superficie conica FBHN (15.) e assim das de mais: logo o circulo S, he igual âs superficies conicas inscriptas na esfera. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XIX. *Theor.*

Supposto o ditto no Lem. 5. *digo, que todas as superficies conicas inscriptas no segmento de huma esfera* GAR, *são iguaes ao circulo, cujo rayo he medio proporcional entre o exo* AO, *do ditto segmento, e a recta* EF.

DEm. He a mesma, que a da *Ant.* e sômente se cita a 17. em lugar da 16.

PRO-

PROPOSIÇÃO XX. *Theor.*

As superficies conicas inscriptas na esfera fenecem na esferica.

Fig. 15.

DEm. Seja dada qualquer minima superficie Z. He manifesto, que dentro da superficie esferica AEBF, se pode dar outra concentrica QPSN, tam pouco menor que ella, que seja o defeito menor que qualquer quantidade assignada Z. Sejão pois circulos maximos das dittas esferas concentricas, os expressados com as mesmas letras; e tire-se o diametro commum AB, a quem corte em Q, à tangente OG.

Se o semicirculo AOB, se cortar pelo medio em E; e o quadrante AE, se bissecar infinitamente; virse-ha a hum arco tam pequeno AC, que seja menor que AO (*Esch.da* 11.6.) e cuja subtensa não toque o circulo interno QPSN: logo será lado de huma figura regular parilatera, cujos lados não chegão ao ditto circulo. Logo se, descripta esta figura, se revolverem ambos os circulos sobre o diametro commum AB, será o aggregado das superficies conicas inscriptas mayor que a superficie esferica interior, e por conseq. menor que a superficie esferica exterior em quantidade, menor que a assignada Z. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXI. *Theor.*

As superficies conicas inscriptas no segmento esferico DAF, fenecem na esferica do ditto segmento.

Fig. 16.

DEm. He semelhante à antecedente.

PROPOSI-

PROPOSIÇÃO XXII. *Theor.*

Fica demonstrado na Prop. 18. *que o circulo, cujo rayo he medio proporcional entre o diametro AE, e a recta EB (tirada da extremidade do diametro â extremidade do lado opposto) he igual a todas as superficies conicas inscriptas na esfera, segundo o* Lem. 4. *Agora digo, que este mesmo circulo, e por consequencia as mesmas superficies fenecem em outro, cujo rayo he o mesmo diametro.* Fig. 16.

DEm. Se pro via de bisecções se inscreverem no circulo maximo de huma esfera figuras parilateras de mais, e mais lados; e pela revolução do ditto circulo se inscreverem na esfera superficies conicas; cõsta manifestamente, que ao mesmo passo que o lado AB, se vay encurtando, se vay tambem estendendo a recta EB, atè fenecer no diametro: logo tambem a media proporcional entre AE, e EB; e por consequencia o circulo, que a tiver por rayo, se hirà augmentando atè fenecer em outro, que tenha por rayo o mesmo diametro, &c. * He tam claro, que não necessita de mais demonstração.

PROPOSIÇÃO XXIII. *Theor.*

Fica demonstrado na Prop. 19. *que o circulo, que tiver por rayo a media proporcional entre EB, e AO (exo do segmento esferico DAF) he igual ao aggregado de todas as superficies conicas inscriptas no ditto segmento, segundo o* Lem. 5. *Agora digo, que este circulo fenece em outro, cujo rayo he a* Fig. 16.

recta AD, tirada do extremo do mesmo exo A, â circunferencia do circulo ODS, base do ditto segmento.

DEm. Consta da *Ant.* que EB, fenece em AE: logo tambem a media proporcional entre EB, e AO, fenecerà na media proporcional entre AE, e AO; isto he, em AD [*Cor.* 2. *da* 8. 6.] logo tambem o circulo, cujo rayo for medio proporcional entre EB, e AO, fenecerà em outro, cujo rayo serà AD. *Q. E. &c.*

Lemma 6.

Se hum diametro for duplo do outro; e o circulo do primeiro, serà quadruplo do circulo de segundo.

DEm. Consta da 2. do l. 12. e da *Def.* 10. do 5.

PROPOSIÇÃO XXIV. *Theor.*

Fig. 15. *A superficie da esfera he quadrupla do circulo maximo da mesma esfera.*

DEm. Imagine-se inscripta no circulo maximo da esfera huma figura regular parilatera, segundo a regra do *Lem.* 4. e que revolvendo-se o ditto circulo sobre o diametro AB, se inscreve na esfera hum solido comprehendido de muitas superficies conicas, &c. Tire-se a recta BC.

Consta da 18. que todas aquellas superficies conicas são iguaes a hum circulo, cujo rayo he medio proporcional entre o diametro AB, e a recta BC: o que succede todas as vezes que se inscrevem no ditto circulo maximo figuras parilateras de mais, e mais

lados

lados &c. porem as dittas ſuperficies conicas fenecem na esferica (20.) aſſim como o circulo, à quem ſão iguaes, em outro, que tem por rayo o diametro AB (22.) logo a ſuperficie esferica he igual ao ditto circulo (2.) e por conſequencia quadrupla do circulo maximo da esfera, por ſer o rayo do primeiro duplo do rayo do ſegundo (*Lem.* 8.) *Q. E.* &c.

COROLLARIO.

DEſte admiravel Theorema ſe tira o modo de exhibir hum circulo igual a qualquer ſuperficie esferica; que he tomando por rayo delle o diametro da meſma esfera.

ESCHOLIO.

Tambem daqui ſe tira o modo de medir a ſuperficie de qualquer esfera, que he o ſeguinte. Dado o diametro da esfera, ache-ſe o ſeu circulo maximo, ſegundo o ditto no Eſch. da 6. *e multiplique-ſe por* 4. *V. g. o circulo maximo da Terra conſta de* 3.160,031 $\frac{2}{3}$. *legoas quadradas: digo, que a ſuperficie da meſma Terra conſtarà de* 12.640,126 $\frac{2}{3}$.

Por outro modo. Multiplique-ſe o diametro da esfera pela circunferencia do ſeu circulo maximo; e o producto darà a ſuperficie esferica. V. g. o diametro da Terra [pelo Eſch. cit.] *conſta de* 2006 $\frac{116}{314}$. *legoas, e a circunferencia de* 6300. *digo que o producto deſtes dous numeros; iſto he,* 12.640,127 $\frac{122}{314}$. *darà o numero das legoas quadradas, de que conſta a ſuperficie. Conſta do* Cor. 1. da 5. *porquanto o rectangulo comprehendido do diametro da esfera, e da circunferencia do circulo maximo, he* 4. *vezes mayor que o ditto circulo.*

PROPOSIÇÃO XXV. *Theor.*

Fig. 16. *A ſuperficie de qualquer ſegmento esferico DAF, he igual ao circulo, cujo rayo he a recta AD, tirada do vertice do ditto ſegmento â circunferencia da baſe ODSF.*

DEm. Imagine-ſe inſcripta na ſecção maxima do ditto ſegmento huma figura parilatera, e equilatera; e que ſe revolve a ditta ſecção ſobre o exo AO: tire-ſe a recta EB. Conſta da 19. que todas as ſuperficies conicas inſcriptas no ſegmento esferico DAF, ſão iguaes ao circulo, cujo rayo he medio proporcional entre EB, e AO; o que ſuccede todas as vezes, que ſe inſcrevem na ditta ſecção figuras parilateras de mais, e mais lados, &c. Porem as ſuperficies conicas, aſſim inſcriptas, fenecem na esferica do ditto ſegmento (21.) aſſim como o circulo, a quem ſão iguaes, no que tem por rayo a recta AD (23.) logo aquella ſuperficie he igual a eſte circulo (2) *Q.E.&c.*

* Tanto eſte, como o *Theor.* antecedente ſão dos mais illuſtres inventos de *Arquimedes*: pelos quaes mereceo immortal gloria entre os Geometras.

PROPOSI-

PROPOSIÇAO XXVI. *Theor.*

A superficie cylindrica de hum cylindro recto, circunscripto a huma esfera, he igual â superficie da mesma esfera. E se tanto o cylindro, como a esfera se cortarem com planos parallelos â base; serão os segmentos da superficie cylindrica iguaes aos segmentos correspondentes da superficie esferica. Fig. 14.

DEm. 1. part. Porquanto o lado cylindrico HP, he igual ao diametro da base PS (*Hyp.*) serà a superficie cylindrica HS, quadrupla da base PFS (*Cor. da* 12.) isto he, do circulo maximo da esfera. Porem deste mesmo circulo he tambem quadrupla a superficie da esfera (24) logo huma he igual â outra *Q. E. &c.*

2. Part. Tirem-se as rectas BQ, AQ. Porquanto o angulo BQA, he recto (31.3.) e a recta QG, he perpendicular â base BA, serà BQ, media proporcional entre BA, e BG (*Cor.* 2. *da* 8. 6.) isto he, entre PS, e PI: logo o circulo, cujo rayo for igual à BQ, serà igual â superficie cylindrica IS (11.) Porem o mesmo circulo he igual â superficie esferica do segmento QBQ (*Ant.*) logo a superficie cylindrica IS, e a esferica QBQ, são iguaes. Do mesmo modo mostrarey, ser igual a superficie cylindrica LS, â esferica OBO: logo tambem a residua IX, serà igual â residua QOOQ; e por consequencia os segmentos cylindricos são iguaes aos segmentos esfericos. *Q. E. &c.*

PROPO-

PROPOSIÇÃO XXVII. *Theor.*

Fig. 14. *Os segmentos da superficie esferica (dividida a esfera com circulos parallelos) são entre si como os segmentos do exo, interceptos entre os dittos circulos.*

DEm. Segue-se da *Ant.* porquanto os segmentos da superficie esferica QAQ, OQQO, MOON, &c. são iguaes aos segmentos da superficie cylindrica HY, IX, LN, &c. porem estes tem entre si a proporção das alturas; isto he, dos segmentos do exo AG, GD, DC, &c. [13.12.] logo &c.

ESCHOLIO.

D*Aqui se colhe o modo de investigar as proporções, que tem entre si as* Zonas, *e os* Climas *da Terra. Porquanto, sendo estas entre si como os segmentos do exo; isto he, sendo todos (começando do Equador MN) como os senos dos arcos MO, MQ, &c. e as differenças, como as differenças dos mesmos senos; facilmente se acharão no* Canon Trigonometrico *as dittas proporções. E daqui mesmo se colhe o modo de medir as dittas* Zonas, *e* Climas: *porquanto, sendo conhecida em legoas quadradas toda a superficie da Terra, e por consequencia a sua metade* (pelo Esch. da 24.) *e sendo conhecidas as dittas proporções, facilmente se acha por regra de 3. a quantidad ede cada* Zona, *ou* Clima.

* *Os 4. Theoremas antecedentes, e todos os que se seguem, são tam admiraveis, que elles só bastavão para fazer respeitavel a Geometria, e appetecido o seu estudo.*

Lemà

Lemma 7.

Se huma esfera tocar hum plano; será a recta OQ, tirada do centro ao ponto do contacto, perpendicular ao ditto plano. Fig. 18.

DEm. Corte-se a esfera, e o plano com 2. planos, os quaes passem pelo centro, e pelo contacto: e seja a commua secção a recta OQ; as secções da esfera os circulos OAQ, OHQ; e as do plano dado as rectas QF, QD: serão estas tangentes dos dittos circulos (18. 3.) e por consequencia rectos os angulos OQF, OQD: logo OQ, he perpendicular ao plano AE (4. 11.) Q. E. &c.

PROPOSIÇÃO XXVIII. *Theor.*

A esfera he igual à pyramide conica, cuja altura AC, he igual ao rayo OR, e cuja base ZZZ, he igual à superficie da mesma esfera. Fig. 19. e 21.

DEm. Imagine-se circunscripto à esfera hum polyëdro regular, e que se lhe cortão os angulos com planos tangentes da mesma esfera (a *Figura* 19. representa o circulo maximo da ditta esfera, com as secções dos angulos &c.) He sem duvida, que feita assim esta divisão, ficarà circunscripto à esfera outro polyëdro menor, tanto no corpo, como na superficie; e que se deste segundo polyëdro se cortarem tambem os angulos, resultarà outro menor; de sorte, que continuando-se assim a divisão, virão finalmente os polyëdros a fenecer na esfera, e os planos tangentes na sua superficie: o que por si he tam manifesto, que se pode tomar por Axioma. Isto supposto.

Qualquer polyëdro assim circunscripto, compoem-

se

se de pyramides rectilineas, cujo vertice commum he o centro da esfera; as bases os planos tangentes; e as alturas o mesmo rayo OR da esfera; por serem todos os rayos, tirados do vertice aos contactos, perpendiculares aos dittos planos (*Lem. ant.*) logo, se descripto o polygono XXX, igual â superficie do ditto polyëdro, se levantar sobre elle huma pyramide rectilinea, cuja altura AC, seja igual à OR; será esta igual à todas aquellas pyramides juntas (6.12.) e por consequencia ao ditto polyëdro.

Fig. 20.

Porem assim como o polyëdro fenece na esfera; assim tambem a pyramide rectilinea AXXX, fenece na conica AZZZ (por ser huma para a outra, como a base, para a base; isto he, como a superficie do polyëdro para a da esfera; das quaes huma fenece na outra) logo a esfera he igual â ditta pyramide conica (1.) *Q. E. &c.*

* A Dem. de *Arquimedes* he muy subtil, e engenhosa; porem he tam prolixa, que depende de 2. *Manifestos*, e de 11. *Proposições*; àlem de outras muitas, de que estas dependem. Advirta-se, que o ditto *Arquimedes* não propoem este *Theor.* nos termos em que nós o propomos, senão assim: *Toda a esfera he quadrupla da pyramide conica, cuja altura he o rayo, e a base o circulo maximo da mesma esfera.*

ESCHOLIO.

D*Este engenhoso* Theor. *se tira o modo de medir a corpulencia de qualquer esfera: porquanto se se multiplicar a sexta parte do diametro (ou a terceira do rayo) pela superficie da esfera, se terà a sua corpulencia. V. g. o diametro da Terra (segundo o ditto no* Esch. da 6.) *consta de* 2006 $\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{5}{4}$. *legoas, cuja sexta parte são* 334 $\frac{1}{3}$: *e a superficie da mesma (segundo o ditto no* Esch. *da* 24.) *consta de* 12.640,127 $\frac{1}{3}$. *Digo, que o producto destes dous numeros; isto he,* 4,226.015,905. *he o numero das legoas*

goas cubicas, de que consta o solido da Terra.

PROPOSIÇÃO XXIX. *Theor.*

O sector da esfera he igual â pyramide conica, que tem por base a superficie esferica do ditto sector, e por altura o rayo da mesma esfera. Fig. 21.

DEm. Seja 1. o sector OBAC, menor que o hemisferio: se a este se circunscrever hum polyëdro, como na *Ant.* facilmente se mostra, com o mesmo discurso, que tanto a corpulencia, como a superficie fenecem nas do sector: logo &c.

Seja 2. o sector OBDC, mayor que o hemisferio: os 2. sectores juntos (isto he, toda a esfera) são iguaes â pyramide, que tem por base toda a superficie da esfera, e por altura o seu rayo (*Ant.*) porem o sector menor he igual â pyramide, que com aquella altura tem por base a menor porção da superficie: logo tambem o mayor serà igual a outra, que com a mesma altura tenha por base a porção mayor (12.12.) *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

COmo a superficie BAC, he igual ao circulo, cuja rayo he AC (25.) e a superficie BDC, he igual à outro circulo, cujo rayo he DC: segue-se, que os dous sectores OBAC, OBDC, são iguaes âs pyramides conicas, cuja altura he o rayo da esfera, e as bases os dittos circulos AC, DC.

Pp ESCHO-

ESCHOLIO.

Daqui se tira o modo de medir os sectores, e os segmentos da esfera. Quanto aos sectores; multiplicando a terceira parte do rayo pela superficie esferica do sector proposto (Esch. da 26. *) a qual se suppoem conhecida pela 27; ou tambem pelo circulo AC, ou DC, &c. E quanto aos segmentos; medindo primeiro a pyramide conica OBSC; e abatendo a, ou accrescentando-a*
Fig. 14. *aô sector menor, ou mayor, &c. O segmento OQQO, intercepto entre dous circulos parallelos, ou não parallelos, se mede, medindo primeiro ambos os segmentos OAO, QAQ, e abatendo o menor de mayor.*

PROPOSIÇÃO XXX. *Theor.*

Fig. 28. *O hesmisferio BESF, he duplo da pyramide conica recta EBF, inscripta nelle.*

DEm. A pyramide conica, que tem por base a superficie hemisferica EBF, e por altura o rayo BO, he para a pyramide conica EBF, inscripta no hemisferio; como a base para a base (11. 12.) isto he, como a superficie do hemisferio para o circulo maximo ESF: porem a ditta superficie he dupla daquelle circulo (24.) logo tambem a primeira pyramide (isto he, o hemisferio) he dupla da segunda. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXXI. *Theor.*

Fig. 24. *Se se dividir huma esfera em 2. segmentos desiguaes GBE, GQE; e continuado o diametro BOQ (perpendicular á commua secção) para huma, e outra parte, se fizer como a altu-*

altura do primeiro ſegmento BO, para o rayo BC; aſſim a altura do ſegundo OQ, para huma quarta QD: ou tambem: como a altura do ſegundo QO, para o rayo QC; aſſim a altura do primeiro OB, para huma quarta BA: ſerão.

1. *As pyramides conicas GDE, GAE (cujas alturas ſão as compoſtas OD, OA, e a baſe commua o circulo GSE) iguaes reſpectivamente aos ſegmentos GQE, GBE.*

2. *A razão dos dittos ſegmentos esfericos, a meſma que a dos ſegmentos do diametro continuado OD, OA.*

3. *E o ſegmento esferico GQE, para a pyramide recta nelle inſcripta, como OD para OQ, aſſim como o ſegmento esferico GBE, para a ſua pyramide tambem inſcripta, como OA para OB.*

DEm. 1. part. Corte-ſe tanto a esfera, como as 2. pyramides conicas com hum plano, o qual paſſe pelo diametro BQ continuado; e ſeja o circulo BGQE, a ſecção maxima da esfera; e os 2. triangulos GAE, GDE, as das 2. pyramides &c. Porquanto o diametro BQ, he perpendicular ao circulo GCES (*Hyp.*) ſerà recto o angulo GOB; aſſim como o angulo no ſemicirculo BGQ (31.3.) logo os triangulos BGO, BQG, ſão ſemelhantes; e por conſequencia BG : GO = BQ : GQ. Porem a razão de BQ para OQ, he duplicada da de BQ para GQ (*Cor. 2. da* 8.6.) logo tambem o ſerà da de BG para GO, ſua igual: e por conſequencia BQ he para OQ, como o circulo cujo rayo he BG, para o circulo, cujo rayo he GO (2.12.)

Porem, por ſer OQ : CQ = BO : AB (*Hyp.*)

 he

he invertendo AB : BO = CQ, ou BC : OQ; e permutando, AB : BC = BO : OQ ; e compondo AC : BC = BQ : OQ. Logo comparando esta proporção com a desima, será o circulo cujo rayo he BG, para o circulo cujo rayo he GO, como AC, para BC : logo, reciprocando os termos, será a pyramide, que tiver por base o circulo do rayo BG, e por altura o rayo da esfera BC; isto he, o sector GBEC (*Cor. da* 29.) igual â pyramide que tiver por base o circulo do rayo GO, e por altura a recta AC (15. 12.) Logo, se tanto ao sector GBEC, como a esta pyramide, se accrescentar a pyramide pequena GSEC ; será todo o segmento esferico OGBE, igual âs 2. pyramides, que tem por base commua o circulo OGSE, e por alturas os segmentos AC, CO ; isto he, a toda a pyramide GAE (14. 12.) *Q. E. &c.*

* O mesmo se entende do outro segmento OGQE.

2. Part. As pyramides GAE, GDE, são entre si como as alturas AO, OD (14. 12.) logo tambem os segmentos esfericos, seus iguaes, OGBE, OGQE, &c.

3. Part. A pyramide GAE, he para a pyramide GBE, como AO para BO (14. 12.) logo tambem o segmento esferico GBE, igual â primeira pyramide, terá para a pyramide inscripta a mesma razão.

ESCHOLIO.

Este Theor. he prolixo, mas summamente engenhoso: delle se tira outro modo mais facil de medir qualquer segmento esferico GBE, que he medindo a pyramide conica GAE, pelo Esch. *da* 6.

PROPO-

PROPOSIÇÃO XXXII. *Theor.*

O cylindro recto HG, he para a esfera inscripta EBFA, tanto na corpulencia, como na superficie (entende-se da total) em razão sesqui-altera; isto he, como 3. para 2. Fig. 23.

DEm. 1. part. Seja BA, exo commum da esfera, e do cylindro; e seja EBF, a mayor pyramide conica inscripta no hemisferio superior. Porquanto o cylindro HF [metade de HG] he triplo da pyramide conica EBF [10. 12.] e o hemisferio circunscripto he duplo da mesma (30.) será o cylindro para o hemisferio como 3. para 2. logo todo o cylindro HG, he para toda a esfera inscripta na mesma razão (12. 5.) *Q. E. &c.*

2. Part. Porquanto HD, lado do cylindro, he igual ao diametro da base DG, será a superficie cylindrica quadrupla da ditta base (*Cor. da* 12.) logo accrescentando-lhe as duas bases DTG, HVK, será *toda* a superficie cylindrica sextupla da mesma base, ou do circulo maximo da esfera ESF. Porem a superficie esferica he quadrupla do mesmo circulo (24.) logo a superficie cylindrica *total* he para a esferica, como 6. para 4. ou como 3. para 2. *Q. E. &c.*

ESCHOLIO.

AGradou-se tanto Arquimedes *deste Theor. [sendo tantas, e tam subtîs as invenções do seu feliz, e fecundissimo engenho] que mandou gravar a figura delle na campa da sua sepultura. Talvez lhe motivou a admiração, o vêr que estes dous corpos seguião a mesma proporção, assim na corpulencia, como na superficie; o que verdadeiramente he admiravel, e rarissimo. O Padre*

Padre Tacquet [engenho tambem feliz entre os da Companhia] observou a mesma propriedade nos Anneis cylindricos, como demonstra no livro 4. daquella sua admiravel Obra dos Corpos Cylindricos *e* Annulares *Prop. 13. 14. e 15. porem despois, profundando mais a especulação sobre a mesma esfera, achou que não só esta a respeito do cylindro circunscripto guardava aquella proporção sesqui-altera; senão que o mesmo cylindro, a respeito da pyramide conica equilatera, circunscripta â mesma esfera, continuava a mesma proporção; assim na corpulencia, como na superficie: o que com muitas outras particularidades [todas de propria invenção] pertencentes a estes 3. Corpos, expoem, e demonstra nas 13. seguintes Proposições.*

PROPOSIÇÃO XXXIII. *Theor.*

A superficie da esfera he dupla da do cylindro quadrado, inscripto nella.

Fig. 26.

D*Em.* Seja AF, o quadrado inscripto no circulo maximo da esfera, o qual revolvendo-se sobre o exo commum BD, descreve o cylindro: e seja RK, o seu commum diametro. Porquanto o quadrado RK, he igual aos dous quadrados iguaes RF, KF, será duplo de RF: logo tambem o circulo, cujo diametro he RK, será duplo do circulo, cujo diametro he RF (2. 12.) Porem a superficie esferica he quadrupla do circulo maximo da mesma esfera; isto he, do circulo RK (24.) logo he octupla do circulo RF. Porem, por serem iguaes AR, RF, a superficie cylindrica he quadrupla do mesmo circulo RF (*Cor. da* 12.) logo a superficie esferica he para a cylindrica; como 8. para 4. ou como 2. para 1. *Q. E. &c*

PROPO-

PROPOSIÇÃO XXXIV. *Theor.*

A superficie da esfera he para toda a superficie do mesmo cylindro, como 4. para 3. Fig. 26.

DEm. A superficie cylindrica AF, he quadrupla da base RF: logo accrescentando-lhe as bases RF, AK, será sextupla. Porem a superficie esferica, como fica demonstrado na antecedente, he octupla: logo a esferica he para *toda* a cylindrica, como 8. para 6. ou 4. para 3. *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

TOda a superficie do cylindro recto circunscripto á esfera, he para *toda* a superficie do cylindro quadrado, inscripto na mesma, como 2. para 1.

Dem. A superficie circunscripta he para a esferica, como 12. para 8. (32.) a esferica he para a inscripta, como 8. para 6. (*Ant.*) logo por igual, a circunscripta he para a inscripta, como 12. para 6. ou 2. para 1. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XXXV. *Theor.*

A superficie esferica de qualquer segmento esferico GBE, he para a superficie conica da pyramide maxima nelle inscripta, como o lado da pyramide GB, para o rayo da base GO. Fig. 26.

DEm. A superficie esferica do ditto segmento he igual ao circulo, cujo rayo he BG (25.) porem este circulo he para a base GSE em duplicada razão de GB para GO (2. 12.) isto he, da razão da superficie conica GBE, para a mesma base GSE (14.) logo a superfi-

perficie esferica, a conica, e a base continuão a mesma razão. Porem a conica he para a base, como o lado GB para o rayo GO (14.) logo tambem a esferica he para a conica, como GB para GO. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XXXVI. *Theor.*

Fig. 21. *A superficie do hemisferio EBFS, he para a superficie da pyramide conica maxima nelle inscripta, como o diametro para o lado do quadrado. E para a superficie da conica circunscripta (semelhante â inscripta) como o lado do quadrado para o diametro.*

DEm. 1. part. Consta manifestamente da antecedente: porquanto a superficie de qualquer segmento esferico he para a da pyramide conica nelle inscripta, como EB, para EO: isto he, pela igualdade dos rayos EO,OB, como o diametro para o lado &c.

2. Part. Seja a metade do quadrado circunscripto
Fig. 5. do l. 4. GLH, o qual revolvendo-se sobre o exo LQ, descreva a pyramide conica circunscripta ao hemisferio &c. Porquanto o quadrado GH, he duplo do quadrado GL, ou DB, será tambem o circulo GLHQ, duplo do circulo DABE (1.12.) porem a superficie do hemisferio inscripto na pyramide, ou seu igual DAB, tambem he dupla do mesmo circulo, ou base DABE (24.) logo o circulo GLHQ, he igual â superficie do ditto hemisferio. Logo, sendo o circulo GLHQ, para a superficie conica circunscripta GLH, como GC para GL; isto he, como o lado do quadrado para o diametro (14.) tambem a superficie do hemisferio inscripto será para a mesma superficie conica na mesma proporção. *Q.E.&c.*

PROPO-

PROPOSIÇÃO XXXVII. *Theor.*

A esfera he para o rhombo quadrado-conico a ella circunscripto (tanto na corpulencia, como na superficie) como o lado do quadrado para o diametro. Fig. 5. do l. 4

DEm. Circunscreva-se ao circulo maximo da esfera o quadrado GLHQ, o qual revolvendo-se sobre o exo LQ, descreva o rhombo quadrado-conico circunscripto â esfera: e continue-se a razão do lado para o diametro [isto he, de GL para GH] por 4. termos S:P:Q:R. Serà S para P, como GL para GH: serà S para R, em triplicada razão de GL para GH: e serâ R para P, em duplicada razão de R para Q; isto he, de GH para GL; isto he, como o quadrado GH, para o quadrado GL: e por consequencia serà R dupla de P. Isto supposto,

1. Part. Considere-se circunscripta outra esfera ao rhombo quadrado-conico. A esfera inscripta he para a esfera circunscripta em triplicada razão de DB para GH, ou de GL para GH; isto he [como fica notado] como S para R. Porem a esfera circunscripta he para o rhombo quadrado-conico, como 2. para 1. (30.) isto he [como tambem fica notado] como R para P: logo por igual, a esfera inscripta he para o rhombo quadrado-conico, como S para P: isto he, como GL para GH, ou como o lado para o diametro. *Q.E.&c.*

2. Part. Consta da *Precedente*, que a superficie hemisferica he para a conica circunscripta; isto he, toda a esferica para toda a rhombo-conica, como o lado para o diametro: logo &c.

PROPOSIÇÃO XXXVIII. *Theor.*

Fig. 27. *A superficie esferica do segmento esferico, que comprehende huma pyramide conica equilatera, he dupla da superficie conica da ditta pyramide.*

DEm. Consta da 35. Porquanto a superficie esferica do segmento FEG, he para a conica inscripta, como FE para FO: porem, por ser a pyramide equilatera, FE he igual à 2 FO: logo &c.

PROPOSIÇÃO XXXIX. *Theor.*

Fig. 27. *A superficie da esfera he para* toda *a da pyramide conica equilatera, nella inscripta, como* 16. *para* 9.

DEm. Seja Q, o centro da esfera: FEG, a pyramide equilatera: ED, o exo commum: e passe por este hum plano, o qual corte a ditta esfera, e pyramide; deixando descripto na commum secção hum circulo maximo, e hum triangulo equilatero nelle inscripto.

Porquanto FO, he media proporcional entre EO, e OD, serà o Quad. FO = Rect. EOD (*Cor. da* 17.6.) E porquanto FG, corta a quarta parte do exo ED (*Cor.* 5. *da* 5. 4.) serà o ditto Rect. EOD; isto he, o Quad. FO, triplo do Quad. OD (16.) logo, como o Quad. do rayo QD, he quadruplo do Quad. OD (20.6.) serà o ditto Quad. QD, para o Quad. FO, como 4. para 3: logo tambem o circulo BECD, serà para o circulo FSG, como 4. para 3. (2:12.) e por consequencia 4. circulos BECD; isto he, a superficie esferica (24.) seràõ para o circulo FSG, como 16. para 3. Porem a superficie conica FEG, he dupla do mesmo circulo FSG (*Cor.* 1. *da* 14.)

da 14.) logo accrescentando-lhe a base (isto he, o mesmo circulo) será a superficie esferica para *toda* a conica, como 16. para 9. *Q.E.&c.*

Por outro modo. Porquanto o lado FG, corta a quarta parte do exo ED, será a superficie esferica do menor segmento FDG, a quarta parte de toda a superficie esferica (27.) e a do segmento mayor FBEC, tres quartas da mesma: logo, se toda a superficie esferica se considerar dividida em 16. partes, tocarão destas 12. ao segmento mayor, Porem a do segmento mayor he para a conica inscripta FFG, como 12. para 6. (*Ant.*) e a conica para a base FSG, como 6. para 3. (*Cor.* 1. *da* 14.) logo ajuntando tudo, será a de toda a esfera para *toda* a da pyramide, como 16. para 9. &c.

PROPOSIÇÃO XL. *Theor.*

A superficie da esfera, he para toda *a da pyramide conica equilatera, circunscripta, como 4. para 9.* Fig. 25.

DEm. Circunscreva-se ao circulo maximo da esfera QEL, o triangulo equilatero MAN, o qual revolvendo-se sobre o exo commum AR, descreva huma pyramide equilatera &c. Circunscreva-se ao mesmo triangulo outro circulo, e â pyramide outra esfera. Porquanto QR, he a quarta parte de AR (*Cor.* 5. *da* 15.4.) será AR dupla de DQ: logo como os circulos são em duplicada razão dos diametros (2. 12.) será o circulo QEL, para o circulo RST, como 1. para 4. Porem o circulo RST (como fica demonstrado na *antecedente*) he para a base da pyramide MZN, como 4. para 3. logo por igual, o circulo QEL, he para o circulo MZN, como 1. para 3.

Porem *toda* a superficie da pyramide equilatera,

MAN, he tripla do mesmo circulo MZN (*Cor.* 1. *da* 14.) logo o circulo QEL, he para *toda* a superficie da ditta pyramide, como 1. para 9. e por consequencia 4. circulos QEL; isto he, a superficie da esfera inscripta (24.) são para a ditta superficie pyramidal, como 4. para 9. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XLI. *Theor.*

Fig. 25. *A superficie total da pyramide conica equilatera, circunscripta á esfera, he quadrupla da total de outra pyramide semelhante, inscripta na mesma esfera.*

DEm. A superficie total da pyramide MAN, he para a da esfera inscripta QEL, como 9. para 4. (*Ant.*) porem a da ditta esfera he para a total da pyramide inscripta GDF, como 16. para 9. (39.) logo por razão perturbada (23. 5.) a superficie da pyramide circunscripta he para a da inscripta, como 16. para 4. ou como 4. para 1. *Q.E.&c.*

PROPOSIÇÃO XLII. *Theor.*

Fig. 27. *A esfera he para a pyramide conica equilatera inscripta, como 32. para 9.*

DEm. Corte-se a esfera, e a pyramide com hum plano, o qual passe pelo exo commum ED; e seja a secção da esfera o circulo maximo BECD; e a da pyramide o triangulo equilatero FEG. Tire-se pelo centro Q, outro plano BTC, perpendicular ao exo; e considere-se inscripto no hemisferio superior a pyramide maxima BEC, cuja secção com o primeiro plano

seja

ſeja o triangulo rectangulo notado com as meſmas letras. Iſto ſuppoſto,

Porquanto o lado FG, corta a quarta parte do exo ED (*Cor. 5. da 15. 4.*) ſerà EO para EQ, como 3. para 2. ou como 9. para 6. He tambem o circulo FSG, para o circulo BECD, ou para ſeu igual BTC, como 3. para 4. ou como 6. para 8. [pelo demonſtrado na 39.] logo ſendo a pyramide FEG, para a pyramide BEC, em razão composta das alturas, e das baſes; iſto he, das perpendiculares EO, EQ; e dos circulos FSG, BTC; iſto he, de 9. para 6. e de 6. para 8. ſerà a pyramide FEG, para a pyramide BEC, como 9. para 8. logo, ſendo a esfera quadrupla da pyramide inſcripta no hemisferio BEC (30.) ſerà a pyramide FEG, para a ditta esfera, como 9. para 32. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XLIII. *Teor.*

A pyramide conica equilatera circunſcripta â esfera, he para a pyramide ſemelhante inſcripta na meſma esfera, como 8. para 1. Fig. 254

DEm. Seja AQ, exo commum da esfera, e das pyramides: e tirado por elle hum plano, ſeja o circulo QEL, a ſecção da esfera; e os triangulos equilateros MAN, GDF, as ſecções das pyramides. Circunſcreva-ſe ao triangulo mayor o circulo RST, e continue-ſe o exo atè R.

Porquanto o lado MN, corta a quarta parte do exo AR, ſerà AR (dupla de DQ) : AQ = DQ : DO; e permutando, ſerà AR : DQ = AQ : DO; e por conſeq. ſerà AQ dupla de DO. Porem pela ſemelhança dos triângulos MAN, GDF, tambem os diametros das baſes conicas MN, GF, ſão entre ſi em razão dupla (4. 6.) logo as pyramides MAN, GDF, ſão ſemelhantes (*Def. 4. 12.*)

e por

e por consequencia em triplicada razão dos diametros das bases MN, GF (12.12.) logo sendo MN para GF, como 2. para 1. será a pyramide circunscripta para a inscripta, como 8. para 1. *Q. E. &c.*

PROPOSIÇÃO XLIV. *Theor.*

Fig. 25. *A esfera he para a pyramide conica equilatera circunscripta, tanto na corpulencia, como na superficie total, como 4. para 9.*

DEm. 1. part. A esfera QEL, he para a pyramide conica equilatera inscripta GDF, como 32. para 9. (42.) a inscripta he para a circunscripta, como 1. para 8. ou como 9. para 72. (*Ant.*) logo por igual, a esfera he para a pyramide circunscripta, como 32. para 72; isto he (partindo os termos por 8.) como 4. para 9. *Q. E. &c.*

2. Part. Fica demonstrado na *Prop.* 40. que a superficie da esfera he para a superficie total da pyramide inscripta, como 4. para 9: logo &c.

ESCHOLIO.

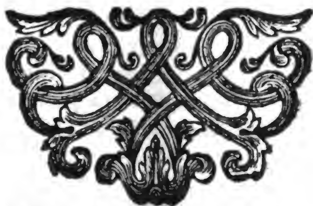
O *Que admirou* Arquimedes *no* Theor. 32. *foy vêr, que tinhão a mesma razão de* 2. *para* 3. *a esfera, e o cylindro circunscripto, tanto na corpulencia, como na superficie. O mesmo, pela mesma razão, se deve admirar na mesma esfera, e pyramide conica equilatera cicunscripta; pois tambem estas guardão entre si huma mesma razão de* 4. *para* 9. *tanto na corpulencia, como na superficie. Porem o que daqui se segue, e o que com razão excede toda a admiração, he vêr, que porisso mesmo os dittos* 3. *corpos; esfera, cylindro, e pyramide conti-*

continuão entre si a mesma razão de 2. para 3. assim na corpulencia, como na superficie: invenção, que toda se deve ao estudo, e engenho do Padre Tacquet, *e que passo agora a demonstrar neste ultimo* Theor. *com que darey fim a este Appendiz.*

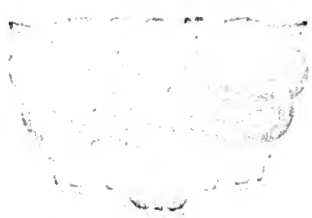
PROPOSIÇÃO XLV. *Theor.*

A esfera, o cylindro recto, e a pyramide conica equilatera, circunscriptos â mesma esfera, continuão entre si a mesma razão sesquialtera de 2. para 3. tanto na corpulencia, como na superficie.

D*Em.* Consta manifestamente do demonstrado. Porquanto o cylindro recto he para a esfera inscripta (assim no corpo, como na superficie) como 3. para 2. ou como 6. para 4. (32.) porem (pela *Precedente*) a pyramide conica equilatera, circunscripta â mesma esfera, he para ella, como 9. para 4. (tanto na corpulencia, como na su erficie) logo estes 3. corpos guardão entre si as razões destes 3. numeros 9 : 6 : 4. isto he, continuão entre si a mesma razão sequi-altera de 3. para 2. *Q. E. &c.*



APPEN-





APPENDIZ III.

DA LINHA QUADRA-triz.

DOUS PROBLEMAS FICARÃO POR resolver nos Elementos de Euclides, *os quaes são de muito uso na* Geometria, *e fazem defectuosa a quella Obra: o* 1. *a trisecção do angulo: o* 2. *a quadratura do circulo. Do* 1. *tratarey* ex professò *na* Geometria Superior: *do* 2. *na* Practica: *porem, porque não fique imperfeito este tratado, darey aqui brevemente hum modo mecanico de resolver hum, e outro Problema, dos muitos que tem excogitado os* Geometras.

Pappo *no livro* 4. *trata de huma linha curva (invenção de* Dinostrato, *e* Nicomedes) *por meyo da qual se triseca o angulo, e quadra o circulo. A geração desta curva, a qual por ser inventada principalmente para este segundo uso, se chama* Quadratrix, *depende de hum instrumento composto de dous*

movimentos contrarios, hum recto, e outro circular; o qual pareceo tam imperceptivel a Pappo, *que porisso mesmo reprovou esta curva, e a lançou fora da* Geometria, *como couza inutil, e impracticavel.*

Todavia Clavio, *reflectindo mais na ditta curva, e vendo a muita utilidade, que della podia resultar à* Geometria, *achou hum modo facil de a descrever; o qual aindaque não he rigorosamente geometrico, porque sómente assignalla os pontos, e não o fluxo da linha; todavia he muy expedito, e assaz exacto; e tanto, que tomando-se mais, e mais pontos, por via de bissecção continuada (a qual he geometrica) se poderá chegar a qualquer exactidão, que se deseje.*

DESCRIPÇÃO DA QUADRATRIZ.

Fig. 1. DEscreva-se pois hum quadrado ABDC; e nelle hum quadrante de circulo ALD: e divididos os lados AC, BD, em quaesquer partes iguaes AT, TI, &c. BR, RN, &c. por via de bissecção (10. 1.) tirem-se as parallelas TR, IN, &c. Divida-se do mesmo modo o quadrante ALD, em outras tantas partes iguaes AS, SH, &c. tambem por via de bissecção (30. 3.) e tirem-se os rayos CS, CH, &c. Digo que se se ajuntarem com huma curva as intersecções dos rayos como as parallelas F, Q, O, X, &c. ficarà descripta a Quadratriz.

DEFINIÇÕES.

1. *O lado da quadratriz:* he o rayo do quadrante AC.
2. *A base da mesma:* he o segmento CE, do outro rayo.

PROPO-

PROPOSIÇÃO I. *Theorema.*

Se do centro C, por quaesquer pontos de quadratriz Q, O, se tirarem rectas; as quaes occerrão ao quadrante nos pontos H, L; e dos mesmos pontos Q, O, se tirarem perpendiculares â base QG, OM; ou tambem parallelas â mesma QI, OP: ficarà dividido o quadrante pelos rayos na mesma proporção, em que o lado AC, pelas parallelas; ou que guardão entre si as perpendiculares (34. 1.) *Isto he, serà AH : HD = AI : IC; item AL : LD = AP : PC; e por consequencia HL, LD = IP : PC* (19. 5.)

DEm. Consta manifestamente da mesma geração da curva: porem para mayor clareza. Porquanto o arco AH, he parte semelhante do quadrante AD; assim como AI do lado AC,

Serà convertendo, AD : HD = AC : IC,
e dividindo, AH : HD = AI : IC. *Que era o 1.*
E serà AD : LD = AC : PC,
e dividindo, AL : LD = AP : PC. *Que era o 2.*
E sendo os 3. arcos HD, AD, LD, proporcionaes âs 3. rectas IC, AC, PC,
Serà por igual, HD : LD = IC : PC,
e dividindo, HL : LD = IP : PC. *Que era o 3.*

Daqui se segue, que assim como ha rectas incômensuraveis, como dissemos no *l.* 2. *Prop.* 11. no *l.* 13. *Prop.* 6. e 11. e trataremos *ex professò* no *l.* 10: assim tambem ha arcos incommensuraveis: pois sendo o arco HL para o arco LD, como a recta IP para a recta PC, he sem duvida, que sendo estas rectas incômensuraveis, o serão tambem aquelles arcos.

PROPOSIÇÃO II. *Probl.*

Dividir qualquer arco HD, em qualquer proporção dada; v.g. de 1. para 2.

Fig. 1. COnstr. Tire-se do ponto H, ao centro do arco a recta HC; a qual corte a quadratriz em Q: tire-se do ponto Q, a recta QI, parallela â base; e divida-se o segmento IC, na proporção dada em P (9. 6.) Do ponto P, tire-se outra parallela â base PO; e pelo ponto O, aonde esta occorre â quadratriz, o rayo CL. Digo que tambem este dividirà o arco HD, na proporção dada em L. Consta da 3. *part. da ant.* por ser IP : PC = HL : LD.

Se se quizer dividir todo o quadrante AD, em qualquer proporção dada: divida-se todo o lado AC, na ditta proporção; e tirada do ponto I, aonde caye a divisão, huma parallela â base IQ, tire-se pelo ponto Q, em que esta occorre â quadratriz, o rayo CH, &c.

Fig. 2. Se se quizer dividir todo o semicirculo EXO, na mesma proporção: divida-se primeiramente o quadrante EX em F, e despois o outro quadrante XO em G; e transfira-se o arco EF, de F em Q: ficarà divido o semicirculo no ponto Q, na proporção dada. A razão he clara; porquanto EF+XG = EQ (*Constr.*) logo tambem FX+GO = QO: porem EF+XG, he para FX +GO na proporção dada (12. 5.) logo tambem EQ, para QO.

Finalmente se se quizer dividir qualquer arco EXOA, mayor que o semicirculo, &c. dividão-se primeiramente os quadrantes, e despois o arco remanente, na proporção dada, e ajuntem-se as partes semelhantes, &c.

COROL-

COROLLARIO.

DAqui se tira hum modo facil de dividir qualquer angulo rectilineo ECX, em qualquer proporção dada, ou em quaesquer partes aliquotas. Descreva-se do vertice C, o arco EX; e divida-se o ditto arco na proporção assignada, &c.

PROPOSIÇÃO III. *Probl.*

Formar hum triangulo Isósceles, cujos angulos sobre a base tenhão para o do vertice qualquer proporção dada.

COnstr. Seja a proporção dada (DN : NB) e represente DN, a quantidade do angulo sobre a base, e NB, a do angulo do vertice. Divida-se NB, pelo meyo em R, e divida-se o semicirculo EXO, de tal sorte em G, que seja EG : GO = DN : NR. Forme-se o triangulo OCG; e será este o que se pede. Fig. 1. Fig. 2.

Dem. Porquanto o arco EG, he para o arco GO, como o angulo EOG, para o angulo OEG (33.6) será o angulo EOG, para o angulo OEG, como DN para NR: porem o angulo OEG, he para o angulo OCG, como NR para NB; isto he, com 1. para 2. (20. 3.) logo por igual, o angulo EOG (ou COG) he para o angulo OCG, como DN para BN. *Q. E. &c.*

COROLLARIO.

DAqui se tira hum modo facil de inscrever qualquer figura regular em hum circulo. Resolva-se a ditta figura em triangulos isósceles; e ache-se (*pelo Esch. da 16. do 4.*) a proporção que tem o angulo sobre

bre a baſe (que he metade do da figura) para o angulo do vertice, ou no centro, &c.

PROPOSIÇÃO IV. *Theor.*

Se o quadrante, e a quadratriz tiverem o meſmo centro; ſerão o arco do quadrante AD, o lado AC, e a baſe da quadratriz CE, continuamente proporcionaes.

Fig. 1.

DEm. Se o não ſão: ſeja AD : AC = AC : CZ (mayor que CE) e deſcripto do centro commum C, o quadrante ZI, o qual occorra â quadratriz em O, tire-ſe o rayo COL, e a perpendicular â baſe OM. Porquanto AD : AC = CD : CZ (*Hyp.*) e CD : CZ = AD : IZ (*7. de Arquimedes*) ſerà AD : AC = AD : IZ (11.5.) e por conſequencia AC = IZ (9.5.) Porem, por ſer AD : LD = AC : PC (1.) e AD : LD = IZ : OZ (*Cor. 2. da 33.6.*) tambem AC : PC = IZ : OZ; iſto he (por ſer AC = IZ) IZ : PC = IZ : OZ: logo PC, ou OM = OZ; iſto he, a metade da corda he igual à metade do arco, a quem ſubtende; o que he abſurdo &c. * O meſmo ſe entende, ſe CZ for menor que CE.

COROLLARIO.

1. DAqui ſe tira o modo de achar huma recta igual a qualquer arco. Seja 1. o arco dado o quadrante AD. Porquanto AD, AC, CE, ſão continuamente proporcionaes, ſerâ invertendo, CE : AC = AC : AD; logo, ſe âs duas rectas CE, AC, ſe buſcar huma terceira proporcional (11.6.) ſerà eſta igual ao quadrante AD: e por conſequencia duplicada, ſerà igual â ſemicircufe-rencia, e quadruplicada à toda a circunferencia do circulo.

Seja

Seja 2. o arco LD, menor que o quadrante. Porquanto AC : PC = AD : LD (1.) e o quadrante AD, se suppoem rectificado, consta manifestamente que se se buscar huma quarta proporcional âs 3. conhecidas AC, PC, AD (12. 6.) serà esta igual ao arco LD. Seja 3. o arco EQ, ou EQA, ou EQAK, mayor que o quadrante. Busque-se (*pela 1. parte*) huma recta igual ao quadrante EX, ou â semicircunferencia EXO, ou aos 3. quadrantes EXOY (segundo for o arco dado) e depois outra igual ao excesso XQ, ou OA, ou YK, &c. Fig. 2.

2 Se a base da quadratriz CE, for rayo de algum circulo; serâ o lado AC, igual ao quadrante do mesmo circulo: e por consequencia o duplo serà igual â semicircunferencia; e o quadruplo à toda a circunferencia, &c. Fig. 1.

Dem. Porquanto os diametros são como as circunferencias dos circulos; e os semidiametros como as suas quartas partes (7. *de Arquimedes*) serà o quadrante AD para o quadrante YE, como AC para CE: porem AD : AC = AC : CE (*Ant.*) logo AD : YE = AD : AC: e por conseq. AC = YE, &c. * Da mesma sorte se demonstra, que se o rayo de qualquer circulo CE, for para o rayo AC, de outro circulo, como a base da quadratriz para o seu lado; serà este segundo rayo igual ao quadrante do primeiro circulo.

3. Do ditto se infere, que se pode exprimir por numeros [por via de approximação] a proporção da circunferencia para o diametro. Divida-se o quadrante AD em 90. gr. e cada grão em 60. min. isto he, divida-se em 5400. particulas iguaes, e em outras tantas o rayo AC: e descreva-se segundo a ditta divisão a quadratriz AOE. Seja CV, huma destas segundas particulas: e tirem-se as rectas VX, CX. He manifesto, que pela insensivel differença, que em tam pouca distancia tem entre si as parallelas VX, CE, se pode tomar huma por outra: logo se no triangulo rectangulo CVX [em que

o an-

o angulo X, he de hum minuto, e o complemento C de 89.gr.59.min.] se tomar o lado CX, de 10. 000,000. particulas; e se resolver o triangulo pelas regras da *Trigonometria*, tocarão ao lado VC, 2909. e ao lado VX, ou CE, seu igual, 9. 999,999: logo, multiplicando 2909. por 5400. tocarão ao lado AC; isto he, ao quadrante YE (*Cor. ant.*) 15. 708,600; e â semi-circunferencia 31. 417,200. Cujo denominador (§. 2. do *App. do l.* 5.) he $3.\frac{1417203}{9999999}$. ou $3.\frac{157467}{1111111}$. [partidos por 9. os termos do fracto] isto he, serà a ditta proporção tripla sesqui-septima; e mayor que a verdadeira, como demonstrou *Arquimedes*.

* Se se quizer outro calculo mais exacto, resolva-se o ditto triangulo CVX, supponde o angulo X, de hum minuto segundo, e o angulo C, de 89. gr. 59. min. e 59. segundos; e tomem-se das Taboas grandes de *Vlacq* os senos respectivos, &c. Eu tomando o seno de 10. segundos das Taboas de *Bonaventura Cavalieri*, achey que a razão do rayo para o quadrante, era como 10. 000,000. para 15. 714,000; e a do diametro para a circunferencia, como 10. 000,000. para 31. 428,000. que reduzida a numeros pequenos, he a mesma de que usa *Ricciolo*; isto he, de 100. para 314.

PROPOSIÇÃO V. *Probl.*

Dado hum circulo, construir hum quadrado igual.

Consta da 5. de *Arquimedes Cor.* 1. que o circulo he igual ao rectangulo, comprehendido do rayo, e da metade da circunferencia: rectifique-se pois pelo *Cor. 2. da ant.* a semi-circunferencia do circulo proposto; e ache-se entre ella, e o rayo huma media proporcional (13.6.) serà esta o lado do quadrado, que se pede (17.6.) * O modo practico de rectificar qualquer semi-

mi-circunferencia, por meyo da quadratriz, he fazer como a base CE ao lado AC, assim o rayo do circulo proposto a hum 4. termo (12. 6.) este dobrado serà igual â metade da ditta semi-circunferencia (*Cor. 2. da ant.*) Porem mais facilmente se pode rectificar a ditta semi-circunferencia, e quadrar o circulo, por meyo de 2. instrumentos muy expeditos na forma seguinte.

1. Descreva-se em huma lamina hum angulo recto; transfira-se para qualquer dos lados a base da quadratriz CE, e para o outro o lado da mesma AC. Se o circulo, que se quizer quadrar, tiver o rayo igual à base CE, serà AC o seu quadrante, e o duplo a sua semi-circunferencia; porem se for mayor, ou menor, como CG, tirada a recta AE, tire-se a parallela GF; e serà CF o seu quadrante &c. Fig. 3.

2. Tirada â descripção a recta EA, e levantada de qualquer ponto C, a perpendicular CD; transfira-se a base da quadratriz de C em E, e duas vezes o lado de C em A: corte-se pelo meyo a recta EA, e descreva-se do ponto medio X, hum semicirculo, o qual corte a perpendicular em D. Digo que a recta CD, he o lado do quadrado igual ao circulo, cujo rayo he CE. Tudo consta do que fica ditto; por ser CD, media proporcional entre CE, e CA; lados do rectangulo, à quem he igual o circulo &c. Agora, se se der outro circulo, cujo rayo for mayor, ou menor que CE, como CG, não ha mais que tirar as parallelas GO, OP, aos lados ED, DA, &c. Fig. 4.

* Advirta-se que para se dividir qualquer destes instrumentos com toda a precisão, se pode recorrer ao *Cor. 3. da ant.* tomando CE, de 10.000. particulas, e CA de 15.714. no primeiro instrumento, ou de 31.428. no segundo.

PROPOSIÇÃO VI. *Probl.*

Fig. 4. *Dado hum quadrado, descrever hum circulo igual.*

COnstr. Seja S, o lado do quadrado proposto. Transfira-se este para a perpendicular do segundo instrumento, de C atè O; e tirem-se as parallelas aos lados GO,OF: serà CG, o rayo do circulo, que se pede. Consta do ditto.

COROLLARIO.

DAqui se segue, que se pode exhibir hum circulo igual a qualquer figura rectilinea; se esta se transformar em hum quadrado pela 14. do 2.

PROPOSIÇÃO VII. *Probl.*

Fig. 3. *Dada huma recta, exhibir huma circunferencia igual.*

COnstr. Tome-se a quarta parte da recta dada, e transfira-se ao 1. instrumento de C atè F: tire-se a parallela FG; e serà CG, o rayo do circulo, cuja circunferencia he 4. vezes mayor que CF. Ou tambem: transfira-se a metade da ditta recta ao 2. instrumento, de C atè F, e corrão-se as parallelas GO,OF: serà CG o rayo &c.

Fig. 4.

PROPOSIÇÃO VIII. *Probl.*

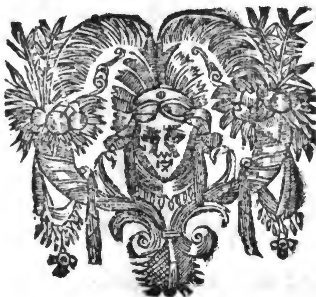
Dados 2. circulos desiguaes POZ, PNX; e dado no menor hum arco OZ, cortar da mayor hum outro arco igual.

Fig. 12. de Arquimedes.

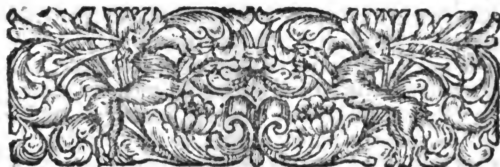
C*Onstr.* Achada a differença dos rayos ON, divida-se o arco dado de tal sorte em V, que seja PO : ON = OV : VZ (2.) tire-se pelo ponto V, o rayo PX; e serà NX, o arco que se pede.

Dem. Porquanto invertendo, ON : PO = ZV : VO, será compondo, PN : PO = ZO : VO : porem tambem PN : PO = XN : VO : logo ZO : VO = XN : VO; e por consequencia ZO = XN. *Q. E. &c.*

Não he differente a praxe, quando o arco dado fosse no circulo mayor, e se buscasse o igual no menor.



DIATRIBA



DIATRIBA
DO PONTO, E DA UNIdade.



ESTA' tam connexa a *Geometria* com a *Fysica* na composição do *Continuo*; que me pareceo necessario dar aqui alguma luz do differente modo, com que huma, e outra considerão a Quantidade; para que não se persuadão os principiantes, que as difficuldades insuperaveis, que encontra a *Fysica* naquella composição, enfraquecem de algum modo as Demonstrações Geometricas.

§. I.

Do Ponto.

PAra que se entenda melhor o que heide dizer, supponho, que a difficuldade principal da composição do *Continuo* consiste, em se as suas partes na ultima divisão são indivisiveis, ou não? Isto he, se feita a divisão atè os ultimos termos, a que pòde

pòde chegar à arte, ou a imaginação; se chega finalmente à partes átomas, e fysicamente indivisiveis: ou se quaesquer, que se tomem por ultimas, são essencialmente divisiveis em outras menores, e menores &c? *Zenão* levou a primeira sentença: *Aristoteles* a segunda: porèm huma, e outra està envolta em huma tal ceguevra de paradoxos, que verdadeiramente he confusão do engenho humano, vèr como entre duas sentenças, que parecem contradictorias, não pode tomar partido. Pelo que respeita à Mathematica huma cousa he certa; e he, que sendo tam facil explicar na primeira sentença, que couza he ponto; isto he, huma parte sem partes, ou parte indivisivel, como diz a 1. *Def. dos Elementos*: na segunda não sómente he difficil, senão totalmente impossivel: porque que parte se pòde considerar sem partes em huma sentença, em que não hà parte tam átoma, que não conste essencialmente de infinitas outras; ao menos em *potencia*, como sente *Aristoteles*?

As Demonstrações Geometricas tanto parece que favorecem a huma, como à outra sentença: antes parece que suppoem huma, e outra. Porquanto, deixando à parte alguns Theoremas da *Geometria Superior*, como são os accessos dos Assymptotos, e das Espiraes; as evoluções das Conchoides, e outras muitas, sómente nos *Elementos*, e sem passar da *Prop.* 13. *do l.* 3. achamos fundamentos ineluctaveis tanto pela indivisibilidade, como pela divisi-
Fig. 16. bilidade do *Continuo*. Diz *Euclides* na *Prop. cit.* que
do l. 3. o circulo toca huma recta indivisivelmente, e em hum só ponto O: logo da continua rotação do circulo pela ditta recta se segue, que tanto ella, como a circumferencia do circulo não constão mais que de indivisiveis. Diz logo no *Cor.* 4. da mesma *Prop.* que tirada huma recta CB, do centro do circulo à qualquer

qualquer ponto da ditta recta, não ha parte nella, por pequena que seja, que não seja divisivel em outras menores partes: logo o *Continuo* consta de partes. Temos pois, que a *Geometria* não sómente favorece a ambas as opiniões, senão que em vez de evitar as difficuldades, ao menos de huma dellas; se involve nas difficuldades de ambas; e o que mais he, que sendo as conclusões de huma, e outra incertas, e imperceptiveis, e pela mayor parte paradoxas; não pódem os seus Theoremas ser tam infalliveis, como se suppoem nas Escholas, e reconhecerão sempre todos os Sabios.

Para acodir pois a esta difficuldade, será todo o meu empenho dar aqui huma breve explicação daquella 1. *Def. dos Elementos*, e dizer em termos claros, em que consiste a indivisibilidade do ponto Mathematico. Digo pois, que o ponto Mathematico nisto se distingue do Fysico, que este (seja, ou não seja possivel) não tem partes, nem ainda pela nossa consideração: e o outro sómente pela nossa consideração he que as não tem; isto he, ou as tenha, ou as não tenha, considera-se como se as não tivesse. V.g. tome-se hũ estylo, e descreva-se com elle huma linha: digo que a ponta daquelle estylo (ou seja grossa, ou delgada) em ordem a geração daquella linha, se considera como indivisivel: e que só movendo-se, e como replicando-se em differentes lugares, he que se considera divisivel, extensa, e com partes; não em si, senão à respeito do espaço por onde se move; ou da linha que descreve. Do mesmo modo descreva-se com hum compasso (ou subtil, ou grosseiro) hum circulo: digo que a ponta immovel se considera como indivisivel; e a movel como divisivel, ao passo que se move. O que alguns explicão por estes termos: a quantidade immota, e parada, na consi-

consideração Mathematica he indivisivel, e inextensa: movida he divisivel, e extensa; porquê não se pòde conceber moto sem extensão, nem extensão sem moto, ao menos imaginario. A razão pois porque o Fysico, e o Mathematico considerão tam differentemente a Quantidade, he, porque o Fysico considera a natureza das couzas, e olha para ellas como por dentro: logo a elle toca investigar, se as partes da Quantidade são indivisiveis, ou não: o Mathematico não he assim; mede sómente a Quantidade, e olha para ella como por fóra: logo só lhe toca saber donde começa, e acaba; e aonde tem os termos extrinsecos da sua extensão: os quaes, porisso mesmo que são termos, não se extendem mais para aquellas partes.

Supposto este principio, e fixando o discurso naquella *Prop. cit.* vejamos como as Demonstrações Geometricas não se embaração com as difficuldades do *Continuo*, nem recebem dellas a menor vacillação. He sem duvida que, descripto hum circulo com qualquer compasso, por grosso, que seja sempre a ponta C, ao redor da qual se revolve o compasso, se pode considerar como indivisivel: tanto porque não muda lugar, que he o mesmo que não ter extensão; como porque para qualquer parte que se revolva, sempre he termo commum de infinitas linhas iguaes; ou estas comecem da parte de dentro, ou da parte de fóra da ditta ponta, ou do meyo della. A outra ponta O, em quanto està parada, tambem se pòde considerar como indivisivel pela mesma razão: porèm a penas se move, jà começa a descrever linha, que he o arco intermedio entre hum, e outro termo.

Supponhamos agora, que ao mesmo passo, que o ponto O, se começa a revolver ao redor do centro C, es move do mesmo ponto hum estylo pela re-

cta

cta OB, perpendicular ao rayo CO: tambem he sem duvida, que ambas estas linhas recta, e curva se não podem ajuntar adequadamẽte, senão naquelle ponto O; por correr cada huma para differente parte, e ser impossivel, que se ache o mesmo ponto em dous lugares. Pois isto he, o que quer dizer *Euclides* naquella *Prop.* diz que a linha recta, e a circular não podem concorrer mais, que em hum só ponto total; porque ao mesmo passo, que caminhão para differentes partes, se desencontrão.

Agora: que o ditto ponto seja fysicamente indivisivel, ou não: isso não diz *Euclides*, nem pertence ao Mathematico: porque, como disse, a este só pertence saber o termo extrinseco, donde começão as linhas: e donde, tirado do centro o rayo CO, tem seu principio extrinseco aquelles 2. motos. Não duvido, que se se tomar outro estylo mais subtil, e outro compasso mais delicado, naquelle mesmo ponto, que dantes se tomava como indivisivel, se possão distinguir 2. motos, circular, e recto: porem sempre se verificarà, o que diz *Euclides*; isto he, que o termo extrinseco, ou intrinseco total, não pòde ser mais que hum; porque o mesmo he mover-se o ponto, que diversificaremse as linhas; e tomar cada huma para differente parte.

Dirão, que aquelle contacto he fysico, e real: logo a parte, em que o circulo toca a recta, ou hade ser realmente divisivel, ou indivisivel. Respondo, que isso toca ao Fysico dizer o que he; porem não ao Mathematico, que não tem mais fim que medir a Quantidade, determinados extrinsecamente os termos da sua extensão. Se a Quantidade constar de indivisiveis, dirá que aquelle contacto he indivisivel: se de partes, dirà que he parte; porèm huma parte tal, que por mais grosseira que

ſe conſidere, nunca movida hade ſer recta, e circular; porque do meyo della ſe haõ de começar a diverſificar os motos; ou eſſe meyo ſeja poſitivo, ou negativo; iſto he, ou ſeja indiviſivel fyſico, ou imaginario.

Na ponta fixa do compaſſo temos hum bom exemplo. Não he pequena duvida na *Fyſica* reſolver, ſe hum indiviſivel ſe pode mover circularmente, ou não? Porèm ſeja o que quer que for do indiviſivel fyſico: do mathematico não póde haver a menor duvida. He certo, que do centro à circumferencia vay ſempre o meſmo intervallo, como aquelle que depende da meſma abertura do compaſſo: logo ſe a ponta do compaſſo for indiviſivel, ſerá o centro indiviſivel, e moverſe-ha circularmente; e ſe não, ſerà hum centro negativo, ou imaginario, conſiderado no meyo da ponta fixa: a qual para qualquer parte, que ſe mova, ſempre leva adiante de ſi a ſua metade: o que he innegavel, pois tanto o moto, como a equidiſtancia ſão evidentes.

O 4. *Cor.* naõ he mais que huma ſequéla do ditto: porquanto, por mais groſſeira que ſeja a ponta movel do compaſſo, nunca he poſſivel, que a ditta ponta ſe ache em dous lugares adequadamente diſtinctos; ou que o ſeu meyo imaginario eſteja em 2. diſtinctas circumferencias: ſobpena de ſe admittir o contradictorio, que inſinua a Demonſtração.

Finalmente tanto do ditto, como da doutrina das *Linhas incommenſuraveis* (da qual trata *Euclides ex profeſſò* em todo o L. 10. e cujo myſterio quaſi ſe toca com as mãos na diagonal do quadrado; e nas partes da linha cortada em media, e extrema razão) ſe ſegue, que as Demonſtrações Geometricas favorecem mais a ſentéça de *Ariſtoteles*, que a de *Zenão*: porém advirto que na opinião dos ſeus melho-

res

res commentadores, *Aristoteles* nunca admittio no *Continuo* partes distinctas com a sua ultima actualidade, senão sómente communicantes, potenciaes, e indeterminadas, e *Syncathegorematicè* infinitas: de que se segue, pelo que toca ao contacto, que aquelle ponto em todo o rigor fysico só he indivisivel *extrinsecè*, e naõ *intrinsecè*; como todo o termo da Quantidade: o que se à alguns parece paradoxo; podem estar certos, que não parece assim à outros: nem sey que seja melhor arbitrio escolher antes as contradições, por serem mais claras.

§ 2.

Da Unidade.

A Unidade não he mais, que huma sombra do Ponto mathematico: e assim, álem do ditto, pouco mais ha que dizer. Ao *Hum* definem os Filosofos: *Indivisum in se, & divisum à quovis alio*: isto he, o que se considera sem partes, e distincto de qualquer outro. Estas unidades repetidas constituem numero, que he objecto da *Arithmetica*: a qual, como sombra da *Geometria*, vay contando por unidades, o que a outra mede por partes. Porém assim como as medidas geometricas são 3. a saber, *Longura*, *Largura*, e *Profundidade*: assim as unidades são em 3. differenças: *Unidade simplez*, *Unidade quadrada*, e *Unidade cubica*: a simplez serve para as linhas, a quadrada para as superficies, e a cubica para os solidos, ou corpos.

Qualquer destas unidades na sua especie he como o ponto: isto he, huma parte sem partes segundo a nossa consideração: porèm isto não tira, que em

outra consideração as não tenha, deixando porisso mesmo de se considerar como unidade. V.g. huma vara tem 5. palmos, e cada palmo 8. polegadas: em quanto a vara he vara, he huma: em quanto palmos, he 5. e em quanto polegadas, he 40.

Considerada a unidade como dividida em partes, de 2. modos se podem estas manejar nas operações arithmeticas; ou como outras tantas unidades mais pequenas, ou como hum quebrado da 1. unidade. Na primeira consideração não se distingue o seu manejo do dos numeros vulgares; porque tanto importa multiplicar 4. varas por 3. como 20. palmos por 15. &c. Na segunda pòde causar alguma perplexidade aos principiantes, vèr como na multiplicação saya muitas vezes o producto menor, que o numero multiplicado: e na divisão saya o quociente mayor, que o numero dividido. Porèm tudo isto nasce de se não perceberem bem os termos da multiplicação, e divisão: porque se suppoem commũmente, que a multiplicação sempre augmenta o numero multiplicado; e que a divisão o diminue; o que he falso, e só se verifica em numeros inteiros.

Para intelligencia destas 2. operações havemos de suppor, que multiplicar 3. por 4. não he mais, que tomar tantas vezes 3. quantas 1. se inclue em 4. E pela mesma razão, multiplicar 3. por $\frac{1}{4}$. ou $\frac{1}{4}$. por 3. não he mais, que tomar a quarta parte de 3. ou tomar tantas vezes $\frac{1}{4}$. quantas 1. se inclue em 3. Do mesmo modo dividir 12. por 4. he partir o numero 12. de tal sórte em 4. partes, que cayba huma dellas a cada hum dos 4. e dividir 3. por 4. he partir de tal sorte o numero 3. em 4. partes, que cayba huma dellas a cada hum dos 4. o que se faz facilmente, partindo cada unidade por 4. e tomando $\frac{1}{4}$. para cada hum. Temos pois que multiplicar, ou

ou partir, não he mais que buſcar hum quarto proporcional a 2. numeros dados, com reſpeito à unidade: iſto he, na multiplicação, que ſeja a unidade para qualquer dos numeros, como o outro para o producto: e na diviſão, que ſeja hum numero para o outro, como o quociente para a unidade. Donde ceſſa a admiração dos principiantes, ſe multiplicando-ſe 12. por $\frac{1}{4}$. he o producto 3. e dividindo-ſe 3. por $\frac{1}{4}$. he o quociente 12. Porquanto na multiplicação, ou ſe toma ſómente a quarta parte de 12. ou 12. vezes $\frac{1}{4}$: e na diviſão, claro eſtà que, ſe ſe dão 3. à $\frac{1}{4}$. ſe haõ de dar 12. à 1.

Porém deixando eſtas conſiderações de menor importancia para os principiantes; o que mais admira nas unidades, he que tambem nellas ſe acha aquella incommenſurabilidade, que ſe acha nas partes da Quantidade; razão porque no 5. l. diſſemos, que as Proporções Irracionaes erão aquellas, que ſe não podião explicar por numeros; porque nem havia medida commua, que as mediſſe, nem fracto, que as explicaſſe. Seja V. g. hum quadrado de 25. palm. cuja raiz he 5. e ſeja outro de 50. igual a 2. do primeiro (como ſuccede no quadrado da diagonal à reſpeito dos dos lados) Digo que por mais que ſe divida a unidade em partes decimas, centeſimas, milleſimas, e millioneſimas, nunca jà mais ſe virà a huma, cujo numero quadrado iguale aquelles 2. divididos tambem em iguaes particulas: o que verdadeiramente he admiravel.

F I M.



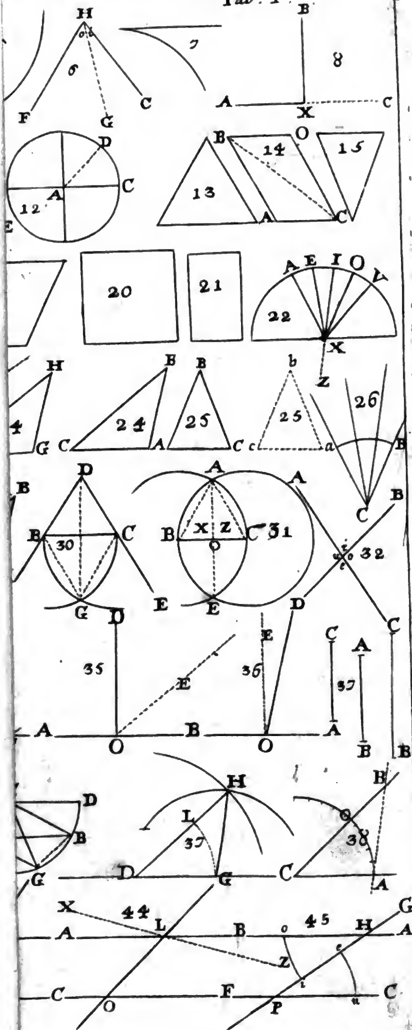
ERRATAS.

Na Prolusão.

Pagina 4. Linha 1. moti	Lea	motivo
pag. 6. lin. 21. Delfico	lea	Deliaco

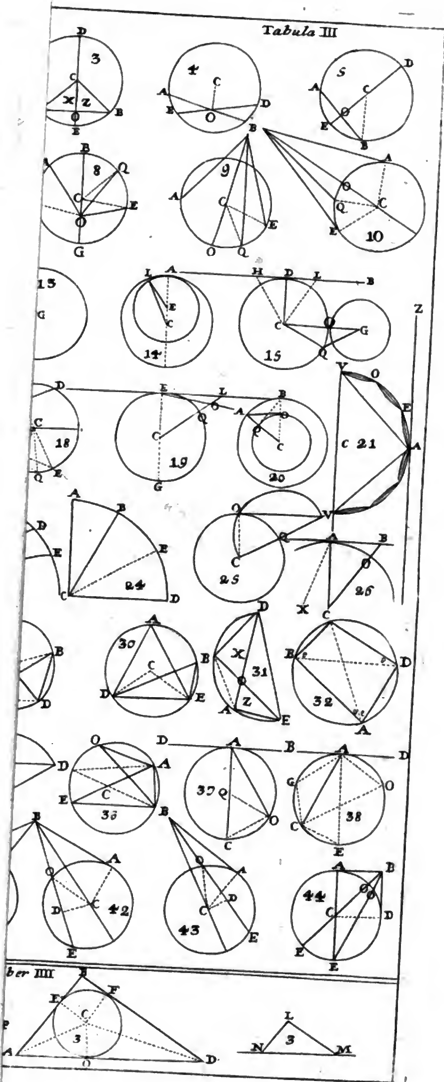
Nos Elementos.

Pagina 1. Linha 8. regiſtar	lea	regiſtrar
pag. 9. lin. 13. da ditta Prop. 29.	lea	da Prop. 31.
pag. 23. lin. 23. Prop. XXIV.	accreſcente, e XXV.	
pag. 56. lin. 12. ua	lea	na
pag. 113. lin. 15. poueco	lea	pouco
pag. 131. lin. 23. devididos	lea	divididos
pag. 168. lin. 10. dê	lea	de
pag. 176. lin. 2. 34.	lea	Fig. 34.
Ibidem lin. 18. Ax. 2.	lea	Ax. 1.
pag. 185. lin. 22. iguaes	lea	parallelos
pag. 187. lin. 27. perdicular	lea	perpendicular
pag. 189. lin. 18. [CB	lea	CB[
pag. 200. lin. 10. ja	lea	ſeja
pag. 209. lin. 11. porporções	lea	proporções
pag. 233. lin. 11. Frrancilco	lea	Francilco
pag. 261. lin. 10. decaëdro	lea	dodecaëdro
pag. 270. lin. 13. 7:223.	lea	71:223.
pag. 175. lin. 24. Propofições	lea	Propoſições
pag. 281. lin. 21. que,	lea	, que
pag. 282. lin. 26. ſeu	lea	ſua
pag. 284. lin. 6. e 7. an-os	lea	angulos
pag. 309. lin. 16. Teor.	lea	Theor.

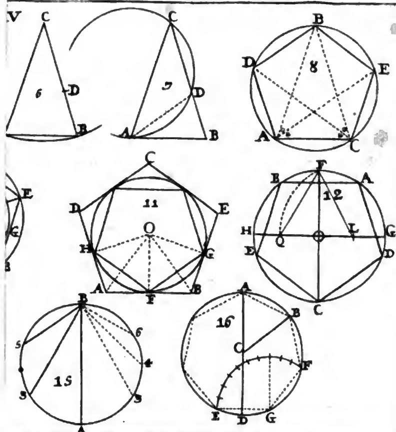

Tab. I.
H
F
G
C
6
7
8
B
A
X
C
12
A
D
C
E
13
14
15
B
O
A
C
20
21
22
A E I O V
X
Z
H
4
G
24
B
C
A
25
B
C
25
b
c
a
26
B
D
B
30
C
E
G
A
B
X
Z
C
31
O
E
A
B
C
32
D
C
D
35
A
O
E
B
E
36
O
C
37
A
A
B
B
D
B
G
H
L
37
D
G
C
B
O
38
A
X
44
L
A
B
45
o
H
G
A
Z
C
O
F
P
C

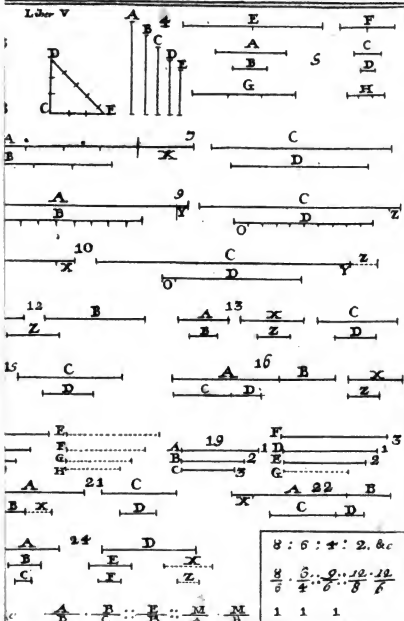
Tab. II

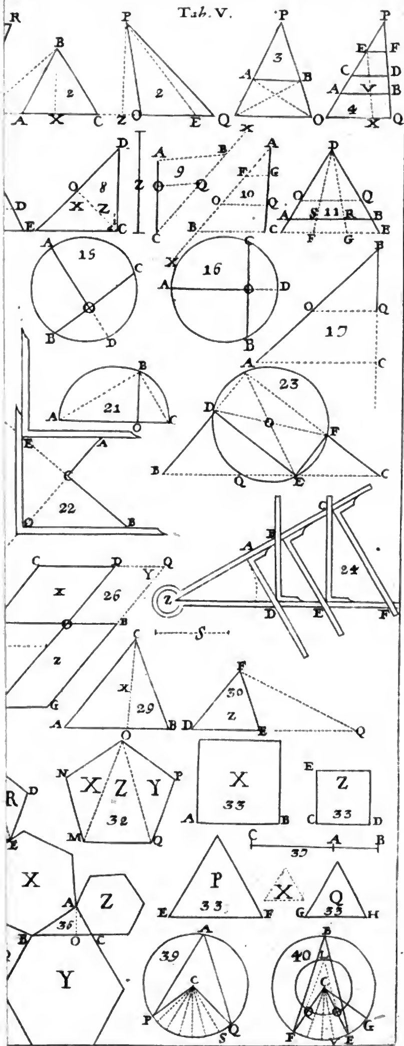
er II



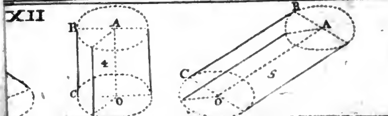
ber IIII

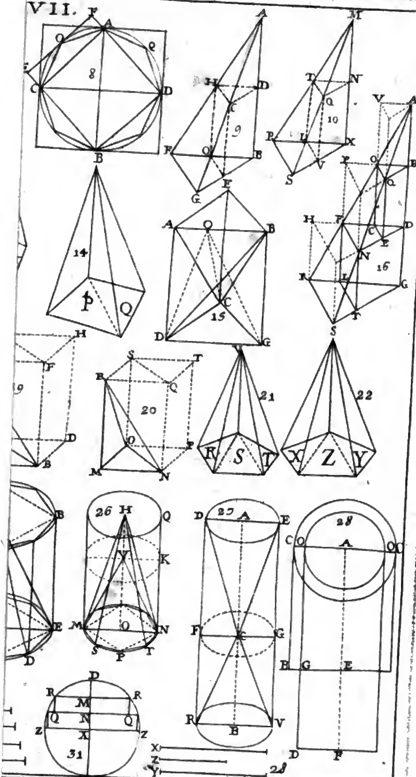


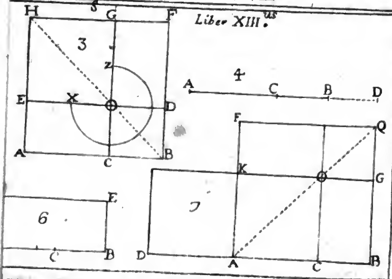

Liber V
8 : 6 : 4 : 2, &c

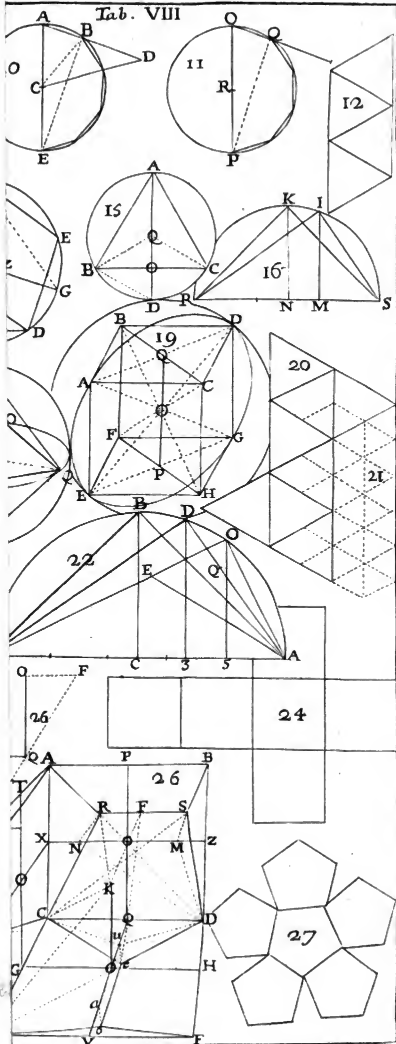

Tab. V.
2
2
3
4
8
9
10
11
15
16
17
21
22
23
24
26
29
30
32
33
33
36
37
38
39
40

Tab. VI

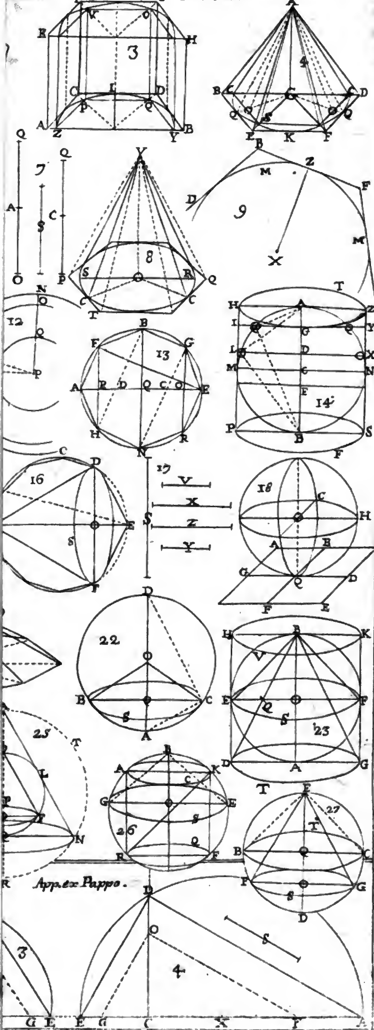



VII.
8
9
10
14
15
16
19
20
21
22
26
27
28
31


Liber XIII.us
3
4
6
7


Tab. VIII
11
12
15
16
19
20
21
22
24
26
26
27





ḧimede
Tab: IX
App. ex Pappo.